MANUALI HOEPLI

ELEMENTI DELLA TEORIA

DELLE

FUNZIONI POLIEDRICHE E MODULARI

DI

GIULIO VIVANTI

PROF. ORDINARIO NELLA R. UNIVERSITÀ DI MESSINA.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO

MILANO

1906

PREFAZIONE

Il presente volumetto ha lo scopo modestissimo di preparare il lettore allo studio delle classiche lezioni sull'icosaedro (*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade,* Leipzig 1884) di Klein, e del trattato sulle funzioni modulari (*Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen,* Leipzig 1890, 1892) di Klein e Fricke. La prima di queste opere, un modello di eleganza geometrica e una vera miniera di idee nuove e geniali, è di assai difficile lettura, e per i molti concetti che vi sono adombrati appena e non svolti, e più ancora perchè, anche dopo aver intesi i varî particolari, il nesso che li lega, il filo conduttore riesce tutt'altro che evidente, e viene in luce soltanto dopo un profondo studio ed un radicale rimaneggiamento dell'intera materia. Quanto alla seconda opera, essa, per la mole e per il multiforme con-

tenuto, non si presta agevolmente ad un primo studio. Tali, almeno, sono i risultati della mia esperienza personale. E poichè, tranne alcuni capitoli dei magistrali corsi di BIANCHI sulle sostituzioni e sulle funzioni di variabili complesse, non conosco alcun trattato che si sia proposto il còmpito di facilitare l'apprendimento della teoria delle funzioni poliedriche e modulari, ho creduto mio dovere far sì che l'opera di elaborazione compiuta per uso mio potesse servire anche ad altri, risparmiando loro la ripetizione di questo utile ma faticoso lavoro.

Fui troppo ardito tentando di racchiudere nel breve spazio di un manualetto i principii di due vaste ed importanti teorie? Forse; però ritenni utile, malgrado la maggior concisione da ciò impostami, abbinare le due teorie, per evitare le ripetizioni che si renderebbero necessarie trattandole separatamente, e per mostrare che la teoria dell'icosaedro, la quale potrebbe apparire nel campo dell'Analisi come un elegante edificio isolato e di un tipo speciale, non è altro che la prima d'una serie di costruzioni congeneri e collegate strettamente fra loro. Meglio ancora sarebbe stato fare un altro passo, ed includere anche la teoria delle funzioni automorfe; ma ciò, come ognuno comprende, esce dal campo del possibile.

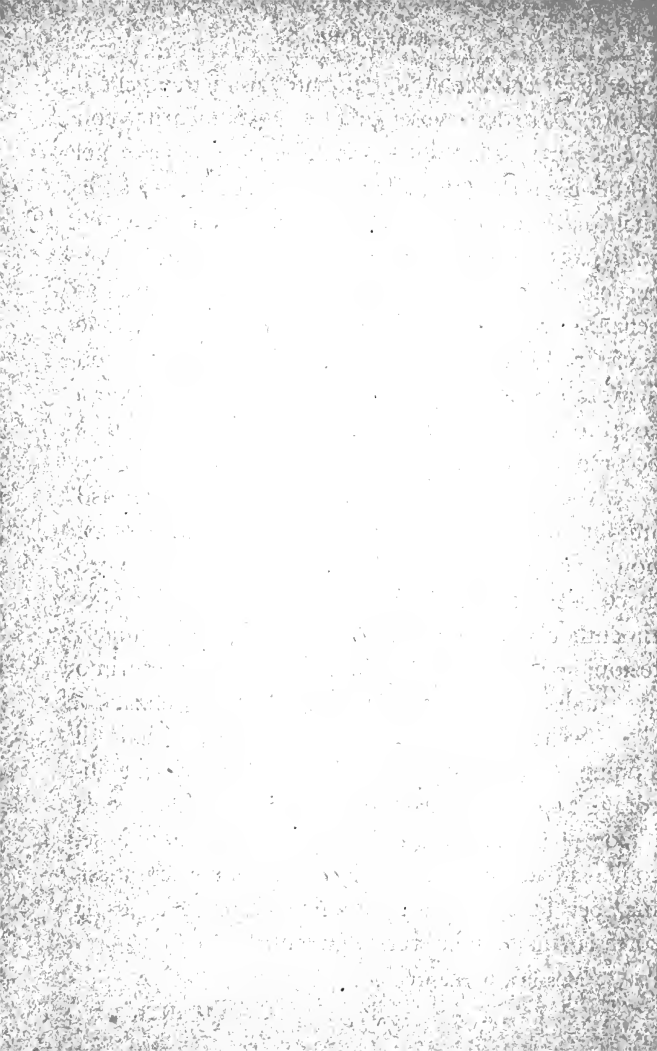
Per la ristrettezza dello spazio, e per l'eurit-

mia della trattazione, ho dovuto ammettere che il lettore, oltre ad avere una certa familiarità con quelle parti della Matematica che si sviluppano nel primo biennio delle Facoltà di Scienze, possieda anche alcune nozioni di varie teorie più elevate: *analysis situs*, funzioni di variabili complesse e superficie di RIEMANN, funzioni ellittiche, integrali abeliani, equazioni differenziali lineari, risoluzione algebrica delle equazioni, teoria dei numeri. Non mancano eccellenti libri, anche italiani, dove si possano trovare tutte le nozioni delle quali mi è occorso di far uso.

Anche per questo volumetto mi fu di prezioso aiuto il mio ottimo collega prof. R. MARCOLONGO, non solo per la sua assistenza nel penoso lavoro di correzione, ma anche, e più, per i suoi suggerimenti, che mi permisero di togliere varie imperfezioni e di colmare varie lacune. A lui esprimo qui pubblicamente la mia sentita riconoscenza.

Meritano pure una parola di sincera lode il Comm. U. Hoepli, uno dei pochi editori che incoraggiano la produzione scientifica in Italia, e la Tipografia Matematica di Palermo, che non è seconda ad alcun'altra per la correzione accuratissima, per l'esecuzione tipografica perfetta, e per la cortesia inalterabile verso gli autori.

Messina, aprile 1906.

G. VIVANTI.

INDICE DELLE MATERIE.

PARTE PRIMA.

I GRUPPI POLIEDRICI E IL GRUPPO MODULARE.

PARTE SECONDA.

LE FUNZIONI E LE EQUAZIONI POLIEDRICHE E MODULARI.

PARTE PRIMA.

I GRUPPI POLIEDRICI E IL GRUPPO MODULARE.

Elementi della teoria dei gruppi d'operazioni.

1. In Matematica si suol designare in generale col nome di *operazione* quell'atto della mente per il quale da uno o più enti di una certa classe si passa ad un altro ente della classe stessa. Così per es. l'addizione, la quale deduce in modo determinato da più numeri un nuovo numero, è un'operazione.

Noi ci limiteremo a considerare quelle operazioni per le quali si passa da *un* ente d'una certa classe ad un altro ente di essa. Tale sarebbe per es., rispetto ai punti d'un piano, una rotazione di data ampiezza intorno ad un certo punto del piano medesimo; essa trasforma ogni punto del piano in un altro punto ben determinato.

Come in Meccanica si considera la quiete come un moto (nullo), così noi considereremo come operazione anche quell'atto della mente per il quale da ciascun ente si passa all'ente medesimo. Tale

operazione si dice *operazione identica* od *identità*, e si denota sovente colla cifra 1.

Dicesi poi *inversa* d'un'operazione P quell'operazione che distrugge l'effetto di questa, per modo che, se per l'operazione P l'elemento A si trasforma nell'elemento B, per la sua inversa B si trasforma in A. L'operazione inversa di P si suol denotare con P^{-1}.

2. Si dice *prodotto* di due operazioni P, Q, e si designa con PQ *, l'operazione la quale ha lo stesso effetto delle P, Q successivamente applicate. Analogamente si definisce il prodotto d'un numero qualunque d'operazioni.

È facile accertarsi con esempi che il prodotto di più operazioni non possiede in generale la proprietà commutativa; esso possiede invece la proprietà associativa.

Due operazioni P, Q tali che sia $PQ = QP$ si dicono *permutabili*.

Evidentemente si ha:

$$1 . P = P . 1 = P,$$

sicchè l'identità è permutabile con ogni operazione.

---

* Alcuni autori invece di PQ scrivono QP. Ecco come può giustificarsi tale notazione. Se a è un elemento, e con Pa si designa il suo trasformato mediante l'operazione P, QPa denoterà il trasformato di Pa mediante Q, cioè l'elemento che si ottiene da a applicando prima l'operazione P e poi l'operazione Q.

La relazione scritta mostra anche l'opportunità del simbolo scelto per l'operazione identica.

Se P, Q sono due operazioni, l'operazione $Q^{-1} P Q = P'$ si dice la *trasformata* di P mediante Q. *La condizione necessaria e sufficiente perchè sia $P' = P$ è che P e Q sieno permutabili;* infatti, se $P Q = Q P$, ne segue:

$$Q^{-1} P Q = Q^{-1} Q P = P,$$

e reciprocamente, se $Q^{-1} P Q = P$, ne segue:

$$P Q = Q P.$$

Se P, Q sono due operazioni qualunque, e l'operazione P muta l'elemento a nell'elemento a', mentre l'operazione Q muta gli elementi a, a' rispettivamente negli elementi a_1, a'_1, l'operazione $Q^{-1} P Q$ muta a_1 in a'_1.

Infatti dalle:

$$a' = P a, \quad a_1 = Q a, \quad a'_1 = Q a'$$

segue:

$$a'_1 = Q(P a) = P Q a = P Q (Q^{-1} a_1) = Q^{-1} P Q a_1 .$$

3. L'operazione che ha lo stesso effetto dell'operazione P ripetuta n volte si denota ovviamente con P^n. Adottando le convenzioni in uso nell'Aritmetica per gli esponenti, si ha quindi che P^0 rappresenta l'operazione P applicata nessuna volta, cioè — qualunque sia P — l'identità, e che P^{-1} rappresenta l'operazione che, moltiplicata per P, dà l'identità, cioè l'inversa di P (cfr. art. 1). Più generalmente P^{-n} è l'inversa di P^n.

4. Dicesi *gruppo* un insieme di operazioni tale che il prodotto di due operazioni qualunque dell'insieme appartenga all'insieme stesso. Per es. tutte le rotazioni intorno ad un dato asse formano un gruppo.

Un gruppo dicesi *finito* od *infinito* secondochè esso consta di un insieme finito od infinito di operazioni. *Ordine* d'un gruppo finito è il numero delle operazioni in esso contenute.

Un gruppo contenuto in un altro dicesi un suo *sottogruppo*.

Le operazioni permutabili con una medesima operazione costituiscono un gruppo.

Sieno P, P' due operazioni permutabili con una stessa operazione Q; sarà:

$$PQ = QP, \quad P'Q = QP',$$

e quindi, per la proprietà associativa del prodotto:

$$(PP')Q = P(P'Q) = P(QP') = (PQ)P' \\ = (QP)P' = Q(PP'),$$

sicchè anche PP' è un'operazione permutabile con Q.

Le operazioni comuni a due gruppi costituiscono un gruppo.

Infatti, se le operazioni P e P' appartengono a due gruppi, appartiene pure ad ambi questi gruppi l'operazione PP'.

5. Se per un'operazione P esiste un valore $t = a$ per cui la relazione:

$$(1) \qquad P^t = 1$$

è soddisfatta, ne esistono evidentemente infiniti altri; tali per es. tutti i multipli di a. Il minimo fra tutti i valori t che soddisfanno alla (1) dicesi *ordine* dell'operazione P. Per esempio, una rotazione dell'ampiezza di $\frac{2\pi}{n}$ intorno ad un asse è un'operazione di ordine n *.

Se P è un'operazione d'ordine n e Q un'operazione qualunque, la trasformata di P mediante Q è pure d'ordine n.

Infatti:

$$(Q^{-1} P Q)^n = Q^{-1} P Q \,.\, Q^{-1} P Q \,\ldots\, Q^{-1} P Q$$
$$= Q^{-1} P^n Q = Q^{-1} Q = 1.$$

Se P è un'operazione di ordine n, ogni numero t per cui $P^t = 1$ è multiplo di n.

Infatti, se t non fosse multiplo di n, eseguendo la divisione, si avrebbe:

$$t = q\,n + r, \quad n > r > 0,$$

quindi:

$$1 = P^t = P^{qn+r} = P^{qn} P^r = (P^n)^q P^r = P^r,$$

ciò che è impossibile perchè $r < n$.

Se P è un'operazione d'ordine n, la sua inversa è P^{n-1} ed è pure d'ordine n.

---

* È evidente che non tutte le operazioni hanno ordine finito. Per es., l'operazione consistente nel moltiplicare per un numero intero m diverso da ± 1, per quanto ripetuta, non dà mai l'identità.

Infatti, essendo:

$$P P^{n-1} = 1,$$

ne segue:

$$P^{n-1} = P^{-1};$$

inoltre, essendo $n - 1$ ed n primi tra loro, il più piccolo numero m per cui $P^{(n-1)m}$ è una potenza di P^n è $m = n$.

Analogamente si trova:

$$P^{n-h} = P^{-h}.$$

Dunque: *Se P è un'operazione d'ordine n, si può in una sua potenza aumentare o diminuire l'esponente di un multiplo intero qualunque di n senza che sia alterato il significato del simbolo.*

6. *Le potenze (d'esponente positivo, nullo e negativo) di una stessa operazione formano un gruppo;* infatti $P^r P^s = P^{r+s}$. Anche le sole potenze positive formano un gruppo, e così le sole potenze negative.

Le potenze d'un'operazione di ordine finito formano un gruppo finito il cui ordine è l'ordine dell'operazione stessa.

Fra le potenze d'un'operazione P d'ordine n le sole:

$$P, \quad P^2, \ \ldots, \quad P^{n-1}, \quad P^n = 1,$$

e tutte queste, sono diverse tra loro. Infatti, se m è un numero diverso dai numeri $1, 2, \ldots, n$, si può aggiungere o togliere ad esso un multiplo di n tale che il risultato coincida con uno di questi

n numeri, per es. col numero r, ed allora $P^m = P^r$ (art. 5); d'altra parte, se, essendo r, s due dei numeri 1, 2, ..., n, fosse $P^r = P^s$, supposto $r > s$, si avrebbe di conseguenza $P^{r-s} = 1$, il che è impossibile, perchè $r - s$ non può essere nè nullo nè multiplo di n.

Il gruppo formato dall'identità e dalle prime $n - 1$ potenze di un'operazione d'ordine n si dice un gruppo *ciclico*.

Un gruppo, le cui operazioni sieno potenze d'una stessa operazione d'ordine finito, è ciclico; infatti si vede facilmente che, se P^r è la minima potenza di P che figura in esso, il gruppo consterà di tutte e sole le potenze di P^r.

7. *Se due potenze d'un'operazione sono eguali tra loro, l'operazione è d'ordine finito.*

Infatti, se $P^r = P^s$, essendo $r > s$, ne segue $P^{r-s} = 1$.

Le operazioni d'un gruppo finito sono tutte d'ordine finito.

Infatti, se P appartiene al gruppo G, appartengono pure a G tutte le sue potenze; ma, poichè G contiene soltanto un numero finito di operazioni, per es. n, è certo che tra le operazioni:

$$P, \quad P^2, \ldots, \quad P^{n+1}$$

ve ne saranno almeno due tra loro eguali. Ne segue che P è d'ordine finito.

8. *Ogni gruppo finito possiede le due proprietà seguenti:*

a) Esso contiene l'operazione identica;

b) Esso contiene l'inversa di ogni sua operazione.

Se P appartiene al gruppo finito G, essa (art. 7) è d'ordine finito m, sicchè $P^m = 1$. Ora P^m appartiene a G, sicchè la proprietà *a*) è dimostrata. Inoltre anche P^{m-1} appartiene a G; ma P^{m-1} è (art. 5) l'inversa di P, sicchè risulta dimostrata anche la proprietà *b*).

Non è superfluo far notare che le proprietà *a*), *b*) non appartengono sempre ai gruppi infiniti. Per es. il gruppo formato (art. 6) dalle potenze positive d'un'operazione d'ordine infinito non possiede nessuna di quelle due proprietà.

9. *L'ordine d'un sottogruppo d'un gruppo finito è un divisore dell'ordine del gruppo* *.

Sia G un gruppo d'ordine n, H un suo sottogruppo d'ordine r. Denotiamo con:

(1) $$P_0 = 1, \quad P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_{r-1}$$

le operazioni di H. Se Q_1 è un'operazione di G diversa dalle (1), le operazioni:

(2) $$P_0 Q_1 = Q_1, \quad P_1 Q_1, \quad P_2 Q_1, \quad \ldots, \quad P_{r-1} Q_1,$$

le quali appartengono tutte a G, sono diverse tra loro e diverse dalle (1). Infatti, se fosse:

$$P_i Q_1 = P_h Q_1,$$

* Di qui segue che un gruppo, il cui ordine è un numero primo, non contiene alcun sottogruppo, tranne sè stesso e l'identità.

ne seguirebbe $P_i = P_h$; se fosse $P_i Q_1 = P_h$, ne seguirebbe $P_i^{-1} P_h = Q_1$, il che è impossibile, perchè, P_i^{-1} appartenendo ad H (art. 8), apparterrebbe pure ad H il prodotto $P_i^{-1} P_h$, ossia Q_1.

Se G, oltre le (1), (2), contiene ancora altre operazioni, prendendo una di queste Q_2 si potranno formare altre r operazioni:

$$P_0 Q_2 = Q_2, \quad P_1 Q_2, \quad P_2 Q_2, \ldots, P_{r-1} Q_2$$

diverse tra loro e dalle (1), (2). E così di seguito. Ma poichè G è un gruppo finito, si avranno finalmente tutte le operazioni di G raccolte nella tabella seguente, dove $s = \frac{n}{r}$:

$$(T)^* \left\{ \begin{array}{llll} P_0 = 1, & P_1, & P_2, & \ldots, P_{r-1} \\ P_0 Q_1 = Q_1, & P_1 Q_1, & P_2 Q_1, & \ldots, P_{r-1} Q_1 \\ P_0 Q_2 = Q_2, & P_1 Q_2, & P_2 Q_2, & \ldots, P_{r-1} Q_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_0 Q_{s-1} = Q_{s-1}, & P_1 Q_{s-1}, & P_2 Q_{s-1}, & \ldots, P_{r-1} Q_{s-1}. \end{array} \right.$$

---

* È chiaro che, invece della tabella (T), possiamo formare l'altra:

$$(T') \left\{ \begin{array}{llll} P_0 = 1, & P_1, & P_2, & \ldots, P_{r-1} \\ Q_1 P_0 = Q_1, & Q_1 P_1, & Q_1 P_2, & \ldots, Q_1 P_{r-1} \\ Q_2 P_0 = Q_2, & Q_2 P_1, & Q_2 P_2, & \ldots, Q_2 P_{r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{s-1} P_0 = Q_{s-1}, & Q_{s-1} P_1, & Q_{s-1} P_2, & \ldots, Q_{s-1} P_{r-1}, \end{array} \right.$$

dove le Q_i possono essere diverse da quelle della (T), e la distribuzione delle operazioni di G nelle varie linee è pure in generale diversa.

La relazione $s = \frac{n}{r}$ mostra che n è sempre multiplo di r.

Se si prende un'operazione qualunque di ciascuna delle linee della tabella (T), si dice che queste operazioni formano un *sistema di rappresentanti* del gruppo G rispetto al sottogruppo H.

Il numero s delle linee della tabella (T) è l'*indice* del sottogruppo H rispetto al gruppo G; esso è il rapporto degli ordini dei due gruppi quando questi sono finiti. Anche un gruppo infinito può avere sottogruppi di indice finito.

10. Se G è un gruppo finito d'ordine n, e P è una sua sostituzione, il cui ordine sia m, il gruppo ciclico (art. 6) d'ordine m generato da P è un sottogruppo di G, quindi (art. 9) m è un divisore di n. Dunque: *L'ordine d'una sostituzione appartenente ad un gruppo finito è un divisore dell'ordine del gruppo.*

11. Abbiansi due sottogruppi G_1, G_2 di indici s_1, s_2 d'un medesimo gruppo finito G. Se G_3 è il gruppo (art. 4) delle operazioni comuni a G_1, G_2, e se s_3 è l'indice del sottogruppo G_3 di G, vogliamo dimostrare che $s_3 \leqq s_1 s_2$.

Diciamo n l'ordine di G, e poniamo:

$$r_i s_i = n \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Sieno:

$$1, \ P_1, \ \ldots, \ P_{r_1 - 1}$$

le operazioni di G_1, e fra queste le $1, P_1, \dots P_{r_3-1}$ costituiscano G_3. Formiamo per il sottogruppo G_1 il quadro (T):

$$\begin{array}{lllll} 1, & P_1, & P_2, & \dots, & P_{r_1-1} \\ Q_1, & P_1Q_1, & P_2Q_1, & \dots, & P_{r_1-1}Q_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{s_1-1}, & P_1Q_{s_1-1}, & P_2Q_{s_1-1}, & \dots, & P_{r_1-1}Q_{s_1-1}, \end{array}$$

scegliendo, fin che è possibile, le Q_i in modo che appartengano a G_2; e le Q_i contenute in G_2 siano $Q_1, Q_2, \dots, Q_{t_1-1}$, dove evidentemente $t_1 \leqq s_1$. Il quadro:

$$\begin{array}{lllll} 1, & P_1, & P_2, & \dots, & P_{r_3-1} \\ Q_1, & P_1Q_1, & P_2Q_1, & \dots, & P_{r_3-1}Q_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{t_1-1}, & P_1Q_{t_1-1}, & P_2Q_{t_1-1}, & \dots, & P_{r_3-1}Q_{t_1-1} \end{array}$$

conterrà tutte le operazioni di G_2, sicchè sarà:

$$r_3 t_1 = r_2.$$

Ne segue:

$$r_2 \leqq r_3 s_1,$$

ossia:

$$s_3 \leqq s_1 s_2.$$

12. *Se si trasformano tutte le operazioni di un gruppo mediante una stessa operazione, si ottiene ancora un gruppo,* che si dice il gruppo *trasformato* di esso mediante questa operazione.

Infatti, se P'_1, P'_2 sono le trasformate di P_1 e di P_2 mediante una stessa operazione Q, $P'_1 P'_2$

è la trasformata di $P_1 P_2$ mediante Q, giacchè dalle:

$$Q^{-1} P_1 Q = P'_1, \quad Q^{-1} P_2 Q = P'_2$$

si deduce:

$$Q^{-1} P_1 P_2 Q = Q^{-1} P_1 Q Q^{-1} P_2 Q = P'_1 P'_2.$$

Può accadere che il trasformato di G mediante un'operazione Q sia identico a G; in tal caso si dice che G è *permutabile* coll'operazione Q.

Se il gruppo dato è ciclico, lo è anche il suo trasformato. Infatti, se P^r è la forma generale delle operazioni del gruppo, e $Q^{-1} P Q = P'$, sarà:

$$Q^{-1} P^r Q = Q^{-1} P Q . Q^{-1} P Q \ \ldots \ Q^{-1} P Q = P'^r.$$

Se il gruppo considerato è un sottogruppo H d'un certo gruppo G, e se Q appartiene a quest'ultimo gruppo, anche il trasformato di H mediante Q, che può denotarsi con $Q^{-1} H Q$, è un sottogruppo di G.

I sottogruppi H e $Q^{-1} H Q$ si dicono *equivalenti*. In particolare, se R è un'operazione del gruppo, le operazioni R e $Q^{-1} R Q$ si dicono *equivalenti*.

Se il gruppo considerato contiene l'identità e l'inversa di ogni sua operazione, l'equivalenza ha le tre proprietà fondamentali dell'eguaglianza. Infatti:

a) Ogni sottogruppo è equivalente a sè stesso; infatti:

$$1^{-1} H 1 = H.$$

b) Se H è equivalente ad H', H' è equivalente

ad H; infatti se:

$$Q^{-1} H Q = H',$$

ne segue:

$$H = Q H' Q^{-1} = (Q^{-1})^{-1} H' (Q^{-1}),$$

che esprime l'equivalenza di H' ad H, essendo Q^{-1} un'operazione appartenente al gruppo.

c) Se H è equivalente ad H' ed H' ad H'', H è equivalente ad H''; infatti dalle:

$$Q^{-1} H Q = H', \quad Q'^{-1} H' Q' = H''$$

segue:

$$Q'^{-1} Q^{-1} H Q Q' = H'',$$

ossia:

$$(Q Q')^{-1} H (Q Q') = H'',$$

che esprime l'equivalenza di H ad H'', essendo $Q Q'$ un'operazione del gruppo.

Può accadere che i due gruppi H e $Q^{-1} H Q$ coincidano tra loro; per es. ciò accade di necessità quando Q è un'operazione di H e H ha le proprietà *a*), *b*) dell'art. 8. Se, comunque si prenda l'operazione Q in G, i sottogruppi H e $Q^{-1} H Q$ sono identici, si dice che H è un sottogruppo *invariante* di G.

13. *Se H è un sottogruppo non invariante di G, può sempre determinarsi un sottogruppo K di G contenente H, e rispetto al quale H sia un sottogruppo invariante.*

Osserviamo anzitutto, che l'insieme delle operazioni di G aventi la proprietà di trasformare H

in sè stesso costituisce un gruppo K. Infatti dalle:

$$Q_1^{-1} H Q_1 = H, \quad Q_2^{-1} H Q_2 = H$$

segue:

$$Q_2^{-1} Q_1^{-1} H Q_1 Q_2 = H,$$

che può scriversi:

$$(Q_1 Q_2)^{-1} H (Q_1 Q_2) = H.$$

Il gruppo K or ora definito contiene H, giacchè — come si è osservato poc'anzi — ogni operazione di H trasforma H in sè stesso; inoltre H è evidentemente un sottogruppo invariante di K.

Può anche notarsi che K è il massimo sottogruppo di G rispetto al quale H sia sottogruppo invariante.

Sieno $1, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{r-1}$ le operazioni di K, e costruiamo per questo sottogruppo il quadro (T), dove $r s = n$, ordine di G:

$$\begin{array}{lllll} 1, & Q_1, & Q_2, & \ldots, & Q_{r-1} \\ R_1, & Q_1 R_1, & Q_2 R_1, & \ldots, & Q_{r-1} R_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{s-1}, & Q_1 R_{s-1}, & Q_2 R_{s-1}, & \ldots, & Q_{r-1} R_{s-1}. \end{array}$$

È facile vedere che le operazioni d'una stessa linea di questo quadro trasformano H in uno stesso sottogruppo equivalente; infatti, tenuto conto che:

$$Q_h^{-1} H Q_h = H \quad (h=1, 2, \ldots, r-1),$$

si ha:

$$(Q_h R_i)^{-1} H (Q_h R_i) = R_i^{-1} Q_h^{-1} H Q_h R_i = R_i^{-1} H R_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, s-1),$$

dove, come si vede, il risultato è indipendente da h. Dunque:

Il numero dei sottogruppi diversi equivalenti ad H, compreso H stesso, è s, ossia è eguale all'indice di K. Questo numero perciò è sempre un divisore di n.

Il sottogruppo costituito dalle operazioni comuni a tutti i sottogruppi tra loro equivalenti è un sottogruppo invariante, giacchè è equivalente soltanto a sè stesso.

14. Sieno:

$$G_m = (1, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}), \ G_n = (1, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1})$$

due gruppi finiti di operazioni, e qualunque operazione del primo gruppo sia permutabile con qualunque operazione del secondo. Le operazioni:

$$(1) \left\{ \begin{array}{lllll} 1, & P_1 & P_2, & \ldots, & P_{m-1} \\ Q_1, & Q_1 P_1, & Q_1 P_2, & \ldots, & Q_1 P_{m-1} \\ Q_2, & Q_2 P_1, & Q_2 P_2, & \ldots, & Q_2 P_{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{n-1}, & Q_{n-1} P_1, & Q_{n-1} P_2, & \ldots, & Q_{n-1} P_{m-1} \end{array} \right.$$

costituiscono un gruppo G_{mn}, di cui G_m, G_n sono sottogruppi invarianti. Infatti si ha anzitutto:

$$Q_i P_h Q_k P_l = Q_i Q_k P_h P_l = Q_r P_s,$$

in secondo luogo:

$$(Q_i P_h)^{-1} P_t (Q_i P_h) = P_h^{-1} Q_i^{-1} P_t Q_i P_h = P_h^{-1} P_t P_h = P_n,$$

$$(Q_i P_h)^{-1} Q_t (Q_i P_h)$$
$$= P_h^{-1} Q_i^{-1} Q_t Q_i P_h = Q_i^{-1} Q_t Q_i = Q_r.$$

Noi vogliamo vedere come dai sottogruppi di G_m, G_n possano dedursi quelli di G_{mn}.

Sieno:

$$G_\mu = (1, P_1, P_2, \ldots, P_{\mu-1}),$$
$$G_\nu = (1, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{\nu-1})$$

due sottogruppi rispettivamente di G_m, G_n. Le operazioni:

$$(2) \begin{cases} 1, & P_1, & P_2, & \ldots, P_{\mu-1} \\ Q_1, & Q_1 P_1, & Q_1 P_2, & \ldots, Q_1 P_{\mu-1} \\ Q_2, & Q_2 P_1, & Q_2 P_1, & \ldots, Q_2 P_{\mu-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{\nu-1}, & Q_{\nu-1} P_1, & Q_{\nu-1} P_2, & \ldots, Q_{\nu-1} P_{\mu-1} \end{cases}$$

costituiscono un sottogruppo $G_{\mu\nu}$ di G_{mn}, che può dirsi ottenuto mediante *combinazione* dei sottogruppi G_μ, G_ν. Non può asserirsi però reciprocamente che ogni sottogruppo di G_{mn} risulti per combinazione di due sottogruppi rispettivamente di G_m, G_n. Sia G_ρ un sottogruppo di G_{mn}, e sieno G_μ, G_ν i massimi sottogruppi comuni ad esso rispettivamente con G_m, G_n; il gruppo G_ρ conterrà evidentemente il gruppo $G_{\mu\nu}$. Se $\rho = \mu\nu$, i due gruppi sono identici. Se invece $\rho > \mu\nu$, G_ρ contiene altre operazioni oltre quelle della tabella (2). Sia $Q_i P_h$ un'operazione di G_ρ; esso conterrà ancora le:

$$Q_i P_h P_1, \quad Q_i P_h P_2, \ldots, Q_i P_h P_{\mu-1};$$

ora $P_h P_1$, $P_h P_2$, ..., $P_h P_{\mu-1}$ sono $\mu - 1$ operazioni di G_m che indicheremo con P_{h_1}, P_{h_2}, ..., $P_{h_{\mu-1}}$, sicchè possiamo dire che, se G_ρ contiene $Q_i P_h$,

contiene altre $\mu - 1$ operazioni:

$$Q_i P_{h_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu - 1).$$

Non ne può contenere altre per cui i abbia lo stesso valore; infatti, se in G_ρ vi fosse un'altra operazione $Q_i P_k$, dove k si suppone diversa da tutte le h_j, posto $P_k = P_h P_l$, sarebbe necessariamente $l > \mu - 1$, e G_ρ dovrebbe contenere anche l'operazione:

$$(Q_i P_h)^{-1} Q_i P_h P_l = P_l,$$

mentre, per ipotesi, le sole operazioni P in esso comprese sono le $1, P_1, P_2, \ldots, P_{\mu-1}$. Dunque può concludersi che, se G_ρ contiene un'operazione d'una linea della tabella (1), esso ne contiene precisamente μ. Ad un'analoga conclusione può giungersi rispetto alle colonne della stessa tabella. Pertanto, se $\rho > \mu\nu$, G_ρ contiene, oltre agli elementi (1), altri elementi che, con opportuni mutamenti d'indici, possono designarsi come segue:

$$(3) \left\{ \begin{array}{llll} Q_\nu P_\mu, & Q_\nu P_{\mu+1}, & \ldots, & Q_\nu P_{2\mu-1} \\ Q_{\nu+1} P_\mu, & Q_{\nu+1} P_{\mu+1}, & \ldots, & Q_{\nu+1} P_{2\mu-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{2\nu-1} P_\mu, & Q_{2\nu-1} P_{\mu+1}, & \ldots, & Q_{2\nu-1} P_{2\mu-1}. \end{array} \right.$$

E così via. I rettangoli (2), (3), etc. sono contenuti nel rettangolo (1), e stanno tutti intorno ad una medesima obliqua come diagonale, come è indicato nella figura, in cui si è supposto:

$$m = 8, \quad n = 6, \quad \mu = \nu = 2, \quad \rho = 12 = 3 \times 4,$$

e si sono indicati con punti gli elementi di G_{mn},

marcando più fortemente quelli che appartengono a G_ρ:

Posto $\rho = \theta\mu\nu$, possono prendersi come rappresentanti di G_ρ rispetto a $G_{\mu\nu}$ le operazioni:

$$1, \quad Q_\nu P_\mu, \quad Q_{2\nu} P_{2\mu}, \ \ldots, \ Q_{(\theta-1)\nu} P_{(\theta-1)\mu}.$$

Le $1, P_1, P_2, \ldots, P_{(\theta-1)\mu}$ formano un sottogruppo $G_{\theta\mu}$ di G_m. Che queste operazioni formano un gruppo, si vede come segue. Se $Q_i P_h$, $Q_k P_l$ sono due operazioni di G_ρ, sicchè:

$$h \leqq (\theta - 1)\mu, \quad l \leqq (\theta - 1)\mu,$$

anche:

$$Q_i P_h Q_k P_l = Q_i Q_k P_h P_l = Q_r P_s$$

appartiene a G_ρ, sicchè $s \leqq (\theta - 1)\mu$; cioè il prodotto di due operazioni $P_j [j \leqq (\theta - 1)\mu]$ è un'operazione dell'insieme stesso.

Parimenti le $1, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{(\theta-1)\nu}$ formano un sottogruppo $G_{\theta\nu}$ di G_n.

Per combinazione dei sottogruppi $G_{\theta\mu}$, $G_{\theta\nu}$ di G_m e di G_n si ottiene un sottogruppo $G_{\theta^2\mu\nu} = G_{\theta\rho}$ di G_{mn} contenente G_ρ come sottogruppo *, ed è

---

* Esso sarebbe rappresentato nella figura da un rettangolo di dimensioni 6, 6 avente un vertice nel vertice superiore di sinistra del rettangolo principale.

questo evidentemente il minimo sottogruppo combinato avente tale proprietà.

Dunque, dato un sottogruppo G_ρ non ottenibile per combinazione, si può costruire un sottogruppo combinato $G_{\mu\nu}$ che è contenuto in esso, ed un altro $G_{\theta^2\mu\nu}$ che lo contiene. Perciò i sottogruppi non combinati si chiamano *intermedi,* e può dirsi che *i sottogruppi di* G_{mn} *o sono combinati o sono intermedi.*

È da osservarsi che G_μ è sottogruppo invariante di $G_{\theta\mu}$. Infatti, se P_i appartiene a G_μ e P_k a $G_{\theta\mu}$, esiste in G_ρ un'operazione $Q_h P_k$, e quindi appartiene pure a G_ρ la:

$$(Q_h P_k)^{-1} P_i Q_h P_k = P_k^{-1} P_i P_k = P_l;$$

ma G_μ è il massimo sottogruppo comune a G_ρ, G_m, quindi P_l, che appartiene ad ambidue, fa parte di G_μ. Parimenti G_ν è sottogruppo invariante di $G_{\theta\nu}$. Se ne deduce immediatamente che $G_{\mu\nu}$ è sottogruppo invariante di $G_{\theta^2\mu\nu}$, e quindi di G_ρ.

Osserviamo ancora, che come rappresentanti di $G_{\theta\mu}$ rispetto a G_μ e di $G_{\theta\nu}$ rispetto a G_ν possono prendersi rispettivamente le operazioni:

$$1,\ P_\mu,\ P_{2\mu},\ \ldots,\ P_{(\theta-1)\mu};\quad 1,\ Q_\nu,\ Q_{2\nu},\ \ldots,\ Q_{(\theta-1)\nu}.$$

Dopo ciò, dati due gruppi G_m, G_n e presi due loro sottogruppi G_μ, G_ν, si cerchi di costruire due sottogruppi $G_{\mu'}$, $G_{\nu'}$ di G_m, G_n contenenti rispettivamente G_μ, G_ν come sottogruppi invarianti, e

tali che i loro ordini siano proporzionali a μ, ν. Posto $\mu'=\theta\mu$, $\nu'=\theta\nu$, si scelga un sistema di rappresentanti $1, P_{\mu}, P_{2\mu}, \ldots, P_{(\theta-1)\mu}$ di $G_{\theta\mu}$ rispetto a G_{μ}, ed uno di rappresentanti $1, Q_{\nu}, Q_{2\nu}, \ldots, Q_{(\theta-1)\nu}$ di $G_{\theta\nu}$ rispetto a G_{ν}. Mediante questi elementi noi potremo costruire un sottogruppo intermedio di G_{mn}; ed è chiaro che se, tenuto fermo per es. l'ordine dei primi rappresentanti, variamo quello dei secondi, otterremo in generale sottogruppi intermedi diversi.

15. Ogni gruppo contiene almeno due sottogruppi invarianti, cioè sè stesso e il gruppo costituito dalla sola identità. Se un gruppo non contiene, oltre questi, altri sottogruppi invarianti, esso dicesi *semplice;* nel caso contrario si dice *composto.*

Ogni gruppo finito, il cui ordine è un numero primo, è semplice (v. art. 9).

Un gruppo si dice *transitivo* rispetto ad una determinata classe di enti, se, dati due enti qualunque di questa classe, esiste sempre nel gruppo un'operazione per la quale si passa dall'uno all'altro di essi; nel caso opposto si dice *intransitivo.*

16. Se fra due gruppi G, G' può stabilirsi una corrispondenza tale, che ad ogni operazione di G corrisponda in G' un'unica operazione, e che al prodotto di due operazioni di G corrisponda il prodotto delle due operazioni corrispondenti di G', si dice che i due gruppi sono *isomorfi.* L'isomorfi-

smo dicesi *oloedrico* quando ad operazioni differenti di G corrispondono sempre operazioni differenti di G', *meriedrico* nel caso contrario.

Due gruppi oloedricamente isomorfi sono identici tra loro dal punto di vista formale, e non possono differire se non per la natura delle operazioni di cui sono composti. Se sono finiti, hanno lo stesso ordine.

Nell'isomorfismo all'identità in G corrisponde l'identità in G'. Supponiamo infatti che alla 1 di G corrisponda in G' un'operazione Q diversa dalla 1; allora, se P, P' sono due operazioni corrispondenti di G, G', alla $1.P = P$ in G dovrebbe corrispondere in G' la QP', che è diversa dalla P'. Ora, se l'isomorfismo è meriedrico, vi sono più operazioni di G aventi come corrispondente in G' l'identità. Tali operazioni formano un gruppo, giacchè, se a P, Q corrisponde in G' la 1, anche a PQ corrisponde la 1. Di più questo gruppo, che vogliamo indicare con G_0, è un sottogruppo invariante di G *; infatti, se P è un'operazione di G_0 e Q un'operazione qualunque di G, e se Q' è la operazione corrispondente a Q in G', all'operazione $Q^{-1}PQ$ di G corrisponde in G' l'operazione $Q'^{-1}\,1\,Q' = 1$, sicchè anche $Q^{-1}PQ$ appartiene

* Di qui segue che, se G è semplice, l'isomorfismo non può essere meriedrico.

a G_0. È facile poi vedere che, se all'operazione R di G corrisponde in G' la R', l'insieme delle operazioni di G corrispondenti alla R' si ottiene moltiplicando per R le operazioni di G_0. Di qui segue che l'ordine di G_0 è il quoziente degli ordini di G e di G'. Questo quoziente si dice *grado di meriedria;* se esso ha il valore 2, l'isomorfismo si dice *emiedrico.*

Sostituzioni lineari.

17. Noi dobbiamo applicare le cose esposte ad una classe importante di operazioni: quella delle sostituzioni lineari.

Dicesi *sostituzione lineare* quell'operazione, per cui si passa da un valore qualunque z ad un altro z' legato ad esso da una relazione della forma:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

dove le α, β, γ, δ sono quantità reali o complesse soggette all'unica condizione:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{2}$$

La sostituzione (1) si denota talvolta brevemente con:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix};$$

la quantità $\alpha\delta - \beta\gamma$ dicesi il *determinante* della sostituzione.

Osserviamo che, qualunque sia c, purchè di-

verso da zero, si ha sempre:

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} c\alpha & c\beta \\ c\gamma & c\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Ne segue, tenuto conto della (2), che si può sempre, senza alterare il significato d'una sostituzione lineare, porla sotto forma tale che sia:

$$(4) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Noi diremo sostituzione *unitaria* una sostituzione lineare il cui determinante è 1, e supporremo in generale, salvo avvertenza in contrario, che le sostituzioni con cui avremo a fare sieno unitarie.

Risolvendo la (1) rispetto a z, si ha:

$$(5) \qquad z = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha},$$

e scambiando z' con z:

$$z' = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha},$$

che è l'operazione inversa della (1). Dunque: *L'operazione inversa d'una sostituzione lineare è una sostituzione lineare.*

Per $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$ la (1) diviene $z' = z$, che è la sostituzione identica.

Risulta chiaramente dalle (1), (5), che una sostituzione lineare fa corrispondere ad ogni valore di z uno ed un solo valore di z', e ad ogni valore di z' uno ed un solo valore di z.

Adottando la solita rappresentazione geometrica dei numeri complessi, può considerarsi una

sostituzione lineare come una trasformazione biunivoca dei punti d'un piano in quelli d'un altro, od anche — quando z e z' si rappresentino nello stesso piano — come una trasformazione biunivoca di un piano in sè stesso. In tale trasformazione, come in qualunque altra del tipo:

$$z' = f(z),$$

dove $f(z)$ rappresenta una funzione della variabile complessa z nel senso di CAUCHY-RIEMANN, le ampiezze degli angoli, come è noto, si conservano.

18. Data una sostituzione lineare non identica:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

possiamo domandarci se esista qualche valore z che sia eguale al corrispondente valore z'. Facendo nella (1) $z' = z$, essa diviene:

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0, \tag{2}$$

equazione la quale nel caso già escluso della sostituzione identica ($\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$) si riduce ad un'identità, e in ogni altro caso ha due radici distinte o no. Dunque:

Una sostituzione lineare non identica lascia invariati uno o due valori di z. Tali valori si dicono *poli* della sostituzione.

19. Consideriamo alcuni tipi speciali di sostituzioni:

a) $$z' = z + h.$$

Tutti i punti del piano vengono trasportati di un vettore eguale ad b, e perciò la sostituzione dicesi *traslazione*. Ogni figura conserva la propria forma. La sostituzione ha un unico polo, che è il punto all'infinito del piano *.

b) $$z' = kz.$$

Posto:

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad z' = \rho' e^{i\varphi'}, \quad k = c e^{i\alpha},$$

si ha:

$$\rho' = c\rho, \quad \varphi' = \varphi + \alpha.$$

Quindi il raggio vettore d'ogni punto viene moltiplicato per una quantità costante, e l'argomento viene aumentato di una quantità costante; si ha cioè una trasformazione per similitudine rispetto all'origine accompagnata da una rotazione intorno all'origine stessa. Diremo per brevità *torsione* la sostituzione considerata. I suoi poli sono l'origine e il punto all'infinito.

Casi particolari della torsione sono la *rotazione*, che corrisponde all'ipotesi $c = 1$, e l'*estensione*, che corrisponde all'ipotesi $\alpha = 0$.

c) $$z' = -\frac{1}{z}.$$

Posto:

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy',$$

---

* Non si deve dimenticare, che nella teoria delle funzioni di variabili complesse si considera il piano come avente un solo punto all'infinito.

si ha:

$$x' = -\frac{x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad x'^2+y'^2 = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Da quest'ultima relazione risulta che la sostituzione considerata trasforma l'interno del cerchio di raggio 1 col centro nell'origine nel suo esterno e viceversa e la circonferenza in sè stessa. Essa dicesi perciò *inversione*. I suoi poli sono i punti $\pm i$.

L'equazione:

$$a(x^2+y^2)+2(bx+cy)+d=0$$

rappresenta in generale un cerchio, il quale si riduce ad una retta se $a=0$.

Applicando la sostituzione considerata si ottiene:

$$d(x'^2+y'^2)+2(-bx'+cy')+a=0,$$

che rappresenta pure un cerchio, o per $d=0$, una retta. Dunque, se si considera la retta come un caso particolare del cerchio, può dirsi che:

L'inversione muta i cerchi in cerchi.

Questa proprietà di mutare i cerchi in cerchi appartiene evidentemente anche agli altri 2 tipi di sostituzioni considerati.

20. Abbiansi due sostituzioni lineari:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

che indicheremo con S, S'. La S muta z in:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta};$$

la S' muta z' in:

$$z'' = \frac{\alpha' z' + \beta'}{\gamma' z' + \delta'} = \frac{(\alpha'\alpha + \beta'\gamma)z + (\alpha'\beta + \beta'\delta)}{(\gamma'\alpha + \delta'\gamma)z + (\gamma'\beta + \delta'\delta)};$$

quindi l'operazione SS' muta z in:

$$\frac{(\alpha'\alpha + \beta'\gamma)z + (\alpha'\beta + \beta'\delta)}{(\gamma'\alpha + \delta'\gamma)z + (\gamma'\beta + \delta'\delta)}.$$

Di qui si vede che *il prodotto di due sostituzioni lineari è una sostituzione lineare,* la cui espressione è data dalla formola seguente:

$$(1)\quad SS' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta \end{pmatrix}.$$

Scambiando la S colla S' si ha di qui:

$$S'S = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix},$$

donde risulta che in generale le operazioni SS' e $S'S$ sono diverse.

21. *Ogni sostituzione lineare può esprimersi come prodotto di traslazioni, torsioni ed inversioni.*

Può verificarsi infatti che si ha, tenuto conto delle (3), (4) dell'art. 17:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix};$$

delle sostituzioni che figurano nel secondo membro la prima e l'ultima sono traslazioni, la seconda è un'inversione, la terza una torsione. Ne segue (art. 19), considerando sempre la retta come un caso particolare del cerchio, che:

Qualunque sostituzione lineare muta i cerchi in cerchi.

22. *Dati due triangoli a lati rettilinei o circolari aventi gli angoli rispettivamente eguali, esiste una sostituzione lineare che trasforma l'uno di essi nell'altro.*

Sieno ABC, $A_1B_1C_1$ i due triangoli, e gli angoli omonimi sieno eguali *.

Se i lati AB, AC, A_1B_1, A_1C_1 sono rettilinei, con una traslazione T si porterà il punto A sul punto A_1, poi con una rotazione R si farà coincidere il lato AB col lato A_1B_1; allora, per l'eguaglianza degli angoli, il lato AC coinciderà col lato A_1C_1, e le figure ABC, $A_1B_1C_1$ saranno omotetiche, sicchè con una estensione H ABC si muterà in $A_1B_1C_1$. Dunque nel caso considerato ABC si trasforma in $A_1B_1C_1$ mediante la sostituzione lineare TRH.

Se AB, AC non sono ambidue rettilinei, detto D il secondo punto d'incontro dei cerchi, o del cerchio e della retta, di cui questi due lati fanno parte, ogni sostituzione S che muta D nel punto all'infinito muterà ABC in un triangolo $A'B'C'$ coi lati $A'B'$, $A'C'$ rettilinei. Indicando con S_1 una sostituzione analoga rispetto ad $A_1B_1C_1$, con $A'_1B'_1C'_1$ il triangolo in cui esso si trasforma,

* Omettiamo la figura, che è semplicissima.

$A'B'C'$ si trasformerà in $A'_1 B'_1 C'_1$ mediante una sostituzione TRH, e quindi ABC in $A_1 B_1 C_1$ mediante la sostituzione $S\,T\,R\,H\,S_1^{-1}$.

23. Sia $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ una sostituzione lineare avente due poli distinti. Questi poli, che indicheremo con p, q, avranno l'espressione:

$$\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = \frac{\alpha-\delta \pm \sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}{2\gamma} = \frac{\alpha-\delta \pm \sqrt{(\alpha+\delta)^2-4}}{2\gamma}.$$

Poichè p, q soddisfanno all'equazione (2) dell'art. 18, sarà:

$$\gamma p^2 + (\delta - \alpha)p - \beta = 0, \quad \gamma q^2 + (\delta - \alpha)q - \beta = 0,$$

da cui:

$$-p(\alpha - \gamma p) = \beta - \delta p, \quad -q(\alpha - \gamma q) = \beta - \delta q.$$

Ne segue:

$$z' - p = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - p = \frac{(\alpha - \gamma p)z + (\beta - \delta p)}{\gamma z + \delta}$$

$$= \frac{(\alpha - \gamma p)(z - p)}{\gamma z + \delta},$$

$$z' - q = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - q = \frac{(\alpha - \gamma q)z + (\beta - \delta q)}{\gamma z + \delta}$$

$$= \frac{(\alpha - \gamma q)(z - q)}{\gamma z + \delta},$$

da cui:

$$\frac{z' - p}{z' - q} = \theta \frac{z - p}{z - q},$$

dove:

$$\theta = \frac{\alpha - \gamma p}{\alpha - \gamma q} = \frac{(\alpha - \gamma p)^2}{(\alpha - \gamma p)(\alpha - \gamma q)} = \frac{(\alpha - \gamma p)^2}{\alpha^2 - \alpha\gamma(p+q) + \gamma^2 pq}.$$

D'altra parte si ha:

$$p + q = \frac{\alpha - \delta}{\gamma}, \quad pq = -\frac{\beta}{\gamma},$$

quindi:

$$\alpha^2 - \alpha\gamma(p+q) + \gamma^2 pq = \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

e:

$$\theta = (\alpha - \gamma p)^2 = \left[\frac{\alpha + \delta - \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4}}{2}\right]^2 *.$$

La sostituzione (1) prende denominazioni diverse a seconda dei diversi valori di θ.

Se $|\theta| = 1$, la sostituzione si dice *ellittica;* se θ è reale e positivo, *iperbolica;* in ogni altro caso *lossodromica.*

24. *Se $\alpha + \delta$ è reale, la sostituzione non può essere lossodromica.*

Sia dapprima $|\alpha + \delta| > 2$; allora θ è reale, e la sostituzione è iperbolica.

Sia invece $|\alpha + \delta| < 2$ **; posto $\alpha + \delta = 2k$,

---

* Se $\gamma = 0$, uno dei poli, p. es. q, è all'infinito, e la sostituzione assume la forma più semplice:

$$z' - p = \theta(z - p),$$

dove $\theta = \alpha^2$.

** Se $\alpha + \delta$ è reale, non può essere $|\alpha + \delta| = 2$, giacchè ne seguirebbe $(\alpha + \delta)^2 = 4$, e i due poli non sarebbero distinti.

dove $|k| < 1$, si ha:

$$\theta = (k - i\sqrt{1-k^2})^2;$$

ora:

$$|k - i\sqrt{1-k^2}| = \sqrt{k^2 + (1-k^2)} = 1,$$

quindi $|\theta| = 1$, e la sostituzione è ellittica.

Una sostituzione lossodromica è il prodotto d'una sostituzione ellittica e d'una sostituzione iperbolica.

Infatti, se $\theta = c e^{i\alpha}$, la sostituzione:

$$\frac{z'-p}{z'-q} = \theta \frac{z-p}{z-q}$$

è il prodotto delle due altre, prese in un ordine qualunque:

$$\frac{z'-p}{z'-q} = e^{i\alpha}\frac{z-p}{z-q}, \quad \frac{z'-p}{z'-q} = c\frac{z-p}{z-q},$$

di cui la prima è ellittica, la seconda iperbolica.

25. Sia ora $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ una sostituzione lineare i cui poli coincidano. La condizione perchè ciò avvenga è:

$$\alpha + \delta = \pm 2,$$

e l'unico polo r è dato da:

$$r = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma},$$

donde:

$$\alpha - \gamma r = \gamma r + \delta.$$

Inoltre si ha (cfr. art. 23):

$$-r(\alpha - \gamma r) = \beta - \delta r.$$

Ne segue:

$$z' - r = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - r = \frac{(\alpha - \gamma r) z + (\beta - \delta r)}{\gamma z + \delta}$$

$$= \frac{(\alpha - \gamma r)(z - r)}{\gamma z + \delta}$$

$$= \frac{(\alpha - \gamma r)(z - r)}{\gamma (z - r) + (\gamma r + \delta)} = \frac{(\alpha - \gamma r)(z - r)}{\gamma (z - r) + (\alpha - \gamma r)},$$

da cui:

$$\frac{1}{z' - r} = \eta + \frac{1}{z - r},$$

dove:

$$\eta = \frac{\gamma}{\alpha - \gamma r} = \frac{2\gamma}{\alpha + \delta} = \pm \gamma.$$

Le sostituzioni aventi un unico polo si dicono *paraboliche*.

I risultati di questo articolo e del precedente mostrano che la specie di una sostituzione (unitaria) dipende dal valore della somma dei suoi due coefficienti estremi.

26. *La trasformata d'una sostituzione mediante un'altra qualunque è della stessa specie della sostituzione primitiva.*

Sieno:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

due sostituzioni qualunque. Poichè (art. 17):

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

si ha (art. 20):

$$Q^{-1}P = \begin{pmatrix} \alpha d - \beta c & -\alpha b + \beta a \\ \gamma d - \delta c & -\gamma b + \delta a \end{pmatrix},$$

e quindi:

$$Q^{-1}P\,Q$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha ad - \beta ac + \gamma bd - \delta bc & -\alpha ab + \beta a^2 - \gamma b^2 + \delta ab \\ \alpha cd - \beta c^2 + \gamma d^2 - \delta cd & -\alpha bc + \beta ac - \gamma bd + \delta ad \end{pmatrix},$$

sicchè, posto:

$$Q^{-1}P\,Q = P' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

si ha:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha' = \alpha ad - \beta ac + \gamma bd - \delta bc \\ \beta' = -\alpha ab + \beta a^2 - \gamma b^2 + \delta ab \\ \gamma' = \alpha cd - \beta c^2 + \gamma d^2 - \delta cd \\ \delta' = -\alpha bc + \beta ac - \gamma bd + \delta ad. \end{cases}$$

Di qui segue, tenuto conto che $ad - bc = 1$:

$$\alpha' + \delta' = \alpha + \delta,$$

relazione che dimostra il teorema.

27. Il significato geometrico delle sostituzioni lineari risulta più chiaro mediante un cambiamento di variabile.

Consideriamo dapprima la sostituzione a due poli:

$$(1) \qquad \frac{z' - p}{z' - q} = \theta \frac{z - p}{z - q},$$

e introduciamo la nuova variabile Z legata alla z dalla relazione:

$$Z = \frac{z - p}{z - q}.$$

La (1) diviene:

$$Z' = \theta Z. \tag{2}$$

Consideriamo la sostituzione:

$$Z' = \theta^{\lambda} Z,$$

dove intendiamo che l'esponente λ possa variare con continuità, per valori reali, positivi e crescenti, dal valore 0, a cui corrisponde la sostituzione identica, al valore 1, a cui corrisponde la (2).

Se la sostituzione è ellittica, posto:

$$Z = \rho e^{i\varphi}, \quad Z' = \rho' e^{i\varphi'}, \quad \theta = e^{i\alpha},$$

si ha:

$$\rho' = \rho, \quad \varphi' = \varphi + \lambda\alpha,$$

sicchè il punto mobile, per andare dalla posizione iniziale a quella finale, percorre un arco di cerchio di ampiezza α intorno all'origine.

Se la sostituzione è iperbolica, posto $\theta = c$, si ha:

$$\rho' = c^{\lambda} \rho, \quad \varphi' = \varphi;$$

il punto mobile percorre un segmento di un raggio uscente dall'origine.

Infine, se la sostituzione è lossodromica, posto:

$$\theta = c e^{i\alpha},$$

si ha:

$$\rho' = c^{\lambda} \rho, \quad \varphi' = \varphi + \lambda\alpha;$$

come si vede da queste formole, il raggio varia in proporzione geometrica mentre l'argomento varia in proporzione aritmetica, quindi il punto mobile descrive una spirale logaritmica col polo nell'origine.

Chiameremo in generale *traiettorie* della sostituzione le linee percorse dal punto mobile nei vari casi.

28. Imaginiamo una sfera tangente al piano Z nell'origine, e proiettiamo stereograficamente il piano sulla sfera, prendendo per polo il punto della sfera opposto al punto di contatto. Considerando come asse il diametro che unisce quest'ultimo punto col polo, i raggi del piano uscenti dall'origine si proiettano sulla sfera in altrettanti meridiani, e i cerchi col centro nell'origine in altrettanti paralleli; inoltre, per la proprietà della proiezione stereografica di lasciare inalterati gli angoli, le spirali logaritmiche col polo nell'origine, le quali, come è noto, tagliano ad angolo costante i raggi uscenti dall'origine stessa, si proiettano in linee che tagliano ad angolo costante i meridiani. Tali linee si chiamano *lossodromie*; di qui il nome di sostituzione lossodromica.

29. Ritorniamo dal piano Z al piano z, limitandoci a considerare le sostituzioni ellittiche ed iperboliche.

Poichè l'operazione per cui si passa dal piano z al piano Z è una sostituzione lineare:

$$Z = \frac{z - p}{z - q},$$

ai cerchi dell'uno dei piani corrisponderanno nell'altro dei cerchi. Ora ai punti p, q del piano z

corrispondono nel piano Z i punti 0, ∞; quindi la famiglia dei raggi uscenti dall'origine nel piano Z, i quali possono considerarsi come cerchi passanti pei punti 0, ∞, avrà per corrispondente nel piano z la famiglia dei cerchi passanti per p, q. Tale famiglia costituisce dunque l'insieme delle traiettorie delle sostituzioni iperboliche coi poli p, q.

Quanto alle sostituzioni ellittiche, le loro traiettorie si trovano facilmente osservando che, per essere $|\theta| = 1$, si ha:

$$\left|\frac{z' - p}{z' - q}\right| = \left|\frac{z - p}{z - q}\right|,$$

sicchè il rapporto delle distanze del punto mobile dai punti p, q è costante. Le traiettorie sono dunque cerchi rispetto a cui p e q sono punti coniugati.

Importa trattenerci un momento sul caso delle sostituzioni ellittiche per meglio determinare il movimento del punto z'. Posto $\theta = e^{i\alpha}$, si ha, indicando con $\arg. u$ l'argomento della quantità complessa u:

$$\arg. \frac{z' - p}{z' - q} = \alpha + \arg. \frac{z - p}{z - q},$$

ossia:

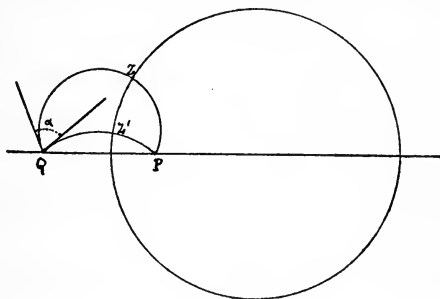
$$\arg. (z' - p) - \arg. (z' - q)$$
$$= \alpha + \arg. (z - p) - \arg. (z - q).$$

Ora, indicando con P, Q, Z, Z' i punti del piano che rappresentano i valori p, q, z, z', si ha:

$$\arg.(z - p) - \arg.(z - q) = QZP,$$
$$\arg.(z' - p) - \arg.(z' - q) = QZ'P,$$

sicchè:

$$QZ'P = \alpha + QZP.$$

Per ottenere quindi il punto Z' dato il punto Z, basta costruire sulla corda PQ un arco di cerchio che nei punti P, Q formi coll'arco PZQ un an-

(Fig. 1).

golo di ampiezza α; l'intersezione di quell'arco col cerchio passante per Z e rispetto al quale P e Q sono punti coniugati sarà il punto Z'.

30. Veniamo ora alle sostituzioni con un solo polo:

$$\frac{1}{z' - r} = \eta + \frac{1}{z - r}.$$

Facciamo il cambiamento di variabile:

$$Z = \frac{1}{z - r};$$

la sostituzione diviene:

$$Z' = \eta + Z,$$

che è una traslazione.

Consideriamo la sostituzione:

$$Z' = \lambda \eta + Z,$$

dove λ varia per valori positivi e crescenti da 0 a 1. Il punto mobile andrà dalla posizione primitiva alla posizione finale percorrendo un segmento di lunghezza e di direzione costante. Le traiettorie della sostituzione costituiscono dunque un fascio di rette parallele. Ora due rette parallele possono considerarsi come due cerchi i cui due punti d'intersezione coincidano all'infinito. Quindi al fascio di rette parallele del piano Z corrisponderà nel piano z un fascio di cerchi passanti per r e tangenti in questo punto ad una stessa retta.

31. *Se P è una sostituzione a poli distinti p, q:*

$$\frac{z' - p}{z' - q} = \theta \frac{z - p}{z - q},$$

e se $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *è un'altra sostituzione qualunque, l'espressione della sostituzione $Q^{-1} P Q$ è:*

$$\frac{z' - p'}{z' - q'} = \theta \frac{z - p'}{z - q'},$$

dove:

$$p' = \frac{\alpha p + \beta}{\gamma p + \delta}, \quad q' = \frac{\alpha q + \beta}{\gamma q + \delta}.$$

Per formare la sostituzione $Q^{-1}PQ$, dobbiamo eliminare z', z'' fra le equazioni:

$$z = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}, \quad \frac{z'' - p}{z'' - q} = \theta \frac{z' - p}{z' - q}, \quad z''' = \frac{\alpha z'' + \beta}{\gamma z'' + \delta};$$

si ottiene così:

$$\frac{\dfrac{\delta z''' - \beta}{-\gamma z''' + \alpha} - p}{\dfrac{\delta z''' - \beta}{-\gamma z''' + \alpha} - q} = \theta \frac{\dfrac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha} - p}{\dfrac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha} - q},$$

ossia:

$$\frac{z''' - \dfrac{\alpha p + \beta}{\gamma p + \delta}}{z''' - \dfrac{\alpha q + \beta}{\gamma q + \delta}} = \theta \frac{z - \dfrac{\alpha p + \beta}{\gamma p + \delta}}{z - \dfrac{\alpha q + \beta}{\gamma q + \delta}}.$$

32. *Se P è una sostituzione a polo unico r:*

$$\frac{1}{z' - r} = \eta + \frac{1}{z - r},$$

e $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *è un'altra sostituzione qualunque, l'espressione della sostituzione $Q^{-1} P Q$ è:*

$$\frac{1}{z' - r'} = \eta' + \frac{1}{z - r'},$$

dove:

$$r' = \frac{\alpha r + \beta}{\gamma r + \delta}, \quad \eta' = \eta(\gamma r + \delta)^2.$$

Eliminando z', z'' tra le equazioni:

$$z = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}, \quad \frac{1}{z'' - r} = \eta + \frac{1}{z' - r}, \quad z''' = \frac{\alpha z'' + \beta}{\gamma z'' + \delta},$$

si ottiene:

$$\frac{1}{\dfrac{\delta z''' - \beta}{-\gamma z''' + \alpha} - r} = n + \frac{1}{\dfrac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha} - r},$$

ossia:

$$\frac{1}{\gamma r + \delta} \frac{-\gamma z''' + \alpha}{z''' - \dfrac{\alpha r + \beta}{\gamma r + \delta}} = n + \frac{1}{\gamma r + \delta} \frac{-\gamma z + \alpha}{z - \dfrac{\alpha r + \beta}{\gamma r + \delta}},$$

od ancora (tenuto conto che $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$):

$$\frac{1}{\gamma r + \delta}\left[-\gamma + \frac{1}{(\gamma r + \delta)\left(z''' - \dfrac{\alpha r + \beta}{\gamma r + \delta}\right)}\right]$$

$$= n + \frac{1}{\gamma r + \delta}\left[-\gamma + \frac{1}{(\gamma r + \delta)\left(z - \dfrac{\alpha r + \beta}{\gamma r + \delta}\right)}\right],$$

e infine:

$$\frac{1}{z''' - \dfrac{\alpha r + \beta}{\gamma r + \delta}} = n(\gamma r + \delta)^2 + \frac{1}{z - \dfrac{\alpha r + \beta}{\gamma r + \delta}}.$$

33. Una sostituzione lineare può essere un'operazione d'ordine finito?

Anzitutto una sostituzione parabolica non lo è mai; essa infatti equivale ad una traslazione, e questa, per quanto ripetuta, non può mai ricondurre il punto mobile alla posizione primitiva.

Cerchiamo dunque fra le sostituzioni a due poli.

Ripetendo m volte la sostituzione:

$$(1) \qquad \frac{z'-p}{z'-q}=\theta\frac{z-p}{z-q},$$

si ottiene la sostituzione:

$$\frac{z'-p}{z'-q}=\theta^m\frac{z-p}{z-q};$$

affinchè questa si riduca all'identità, dev'essere $\theta^m=1$. Cioè: *Affinchè una sostituzione a due poli* (1) *sia d'ordine finito, è necessario e sufficiente che* θ *sia una radice dell'unità d'indice finito.* Quindi: *Le sole sostituzioni lineari che possono essere di ordine finito sono le sostituzioni ellittiche.* E come conseguenza (v. art. 7): *Ogni gruppo finito di sostituzioni lineari consta di sole sostituzioni ellittiche.*

34. *Se due sostituzioni d'ordine finito hanno gli stessi poli, può trovarsi una terza sostituzione di cui ambedue sono potenze.*

Abbiansi le due sostituzioni degli ordini m, m':

$$\frac{z'-p}{z'-q}=\theta\frac{z-p}{z-q}, \qquad \frac{z'-p}{z'-q}=\theta'\frac{z-p}{z-q}.$$

Se n è il minimo multiplo di m, m', e se η è una radice primitiva n^{esima} dell'unità, sarà:

$$\theta=\eta^{\frac{hn}{m}}, \quad \theta'=\eta^{\frac{h'n}{m'}},$$

essendo h, h' interi, e le due sostituzioni saranno le potenze $\left(\frac{hn}{m}\right)$-esima e $\left(\frac{h'n}{m'}\right)$-esima della:

$$\frac{z'-p}{z'-q}=\eta\frac{z-p}{z-q}.$$

35. Sia G un gruppo finito di sostituzioni, e supponiamo che tra queste le sostituzioni P_1, $P_2, \ldots, P_{r-1}$ abbiano un polo comune q. È evidente che esse, insieme all'identità (rispetto alla quale tutti i punti si possono considerare come poli), formano un sottogruppo; giacchè, se le P_i, P_h lasciano invariato il punto q, lo stesso ha luogo per la $P_i P_h$.

Supponiamo per semplicità che il punto q sia all'infinito; allora le P_i avranno la forma (art. 23):

$$z' - p_i = \theta_i (z - p_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Si ottiene facilmente per la sostituzione $P_i P_h$:

$$z' = \theta_i \theta_h z + \sigma,$$

e per la $P_h P_i$:

$$z' = \theta_i \theta_h z + \tau,$$

dove:

$$\sigma = -\theta_h \theta_i p_i + \theta_h (p_i - p_h) + p_h,$$
$$\tau = -\theta_h \theta_i p_h + \theta_i (p_h - p_i) + p_i.$$

Ne segue per la sostituzione $(P_h P_i)^{-1}$, ossia $P_i^{-1} P_h^{-1}$:

$$z' = \frac{z - \tau}{\theta_i \theta_h},$$

e quindi per la sostituzione $P_i P_h P_i^{-1} P_h^{-1}$:

$$z' = \frac{[\theta_i \theta_h z + \sigma] - \tau}{\theta_i \theta_h}$$

$$= z + \frac{\sigma - \tau}{\theta_i \theta_h} = z - \frac{1}{\theta_i \theta_h} (\theta_i - 1)(\theta_h - 1)(p_i - p_h).$$

Se nessuno dei fattori dell'ultimo termine fosse nullo, la sostituzione $P_i P_h P_i^{-1} P_h^{-1}$ sarebbe parabo-

lica; ma ciò è impossibile perchè (art. 33) essa appartiene ad un gruppo finito. E poichè $\theta_i \neq 1$, $\theta_h \neq 1$, dev'essere $p_i = p_h$. Dunque le sostituzioni $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$ hanno comuni ambi i poli, e però (art. 34) sono potenze d'una medesima sostituzione. Da ciò segue (art. 6) che il gruppo $1, P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$ è ciclico. Concludendo:

Le sostituzioni lineari d'un gruppo finito aventi comune un polo hanno comune anche l'altro polo e formano un sottogruppo ciclico.

Dal teorema dell'art. 31 segue che:

Se p, q sono i poli delle sostituzioni d'un sottogruppo ciclico Γ d'un gruppo finito G, e $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *è una sostituzione di G, i poli delle sostituzioni del sottogruppo ciclico* (art. 12) $\Gamma' = Q^{-1} \Gamma Q$ *sono*:

$$p' = \frac{\alpha p + \beta}{\gamma p + \delta} = Q(p), \quad q' = \frac{\alpha q + \beta}{\gamma q + \delta} = Q(q).$$

I poli p, p' diconsi *equivalenti*, e così i poli q, q'.

36. Sia G un gruppo finito d'ordine n, Γ un suo sottogruppo ciclico d'ordine ν formato (art. 35) da tutte le sostituzioni di G aventi i medesimi poli p, q. Sieno $1, P, P^2, \ldots, P^{\nu-1}$ le sostituzioni di Γ, e il quadro (T) (art. 9) relativo a questo sottogruppo sia:

$$\begin{array}{llll} 1, & P, & P^2, & \ldots, P^{\nu-1} \\ Q_1, & P Q_1, & P^2 Q_1, & \ldots, P^{\nu-1} Q_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{\frac{n}{\nu}-1}, & P Q_{\frac{n}{\nu}-1}, & P^2 Q_{\frac{n}{\nu}-1}, & \ldots, P^{\nu-1} Q_{\frac{n}{\nu}-1}. \end{array}$$

Poichè p non è polo d'alcuna sostituzione di G all'infuori di quelle della prima linea, i punti:

$$p_i = Q_i(p) \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{\nu} - 1\right)$$

saranno tutti diversi da p. Essi saranno poi anche diversi tra loro, giacchè, se fosse:

$$Q_i(p) = Q_h(p),$$

ne seguirebbe:

$$p = Q_h Q_i^{-1}(p),$$

e, poichè le sole sostituzioni che lasciano invariato p sono P e le sue potenze, dovrebbe essere per un opportuno valore di l:

$$Q_h Q_i^{-1} = P^l,$$

ossia:

$$Q_h = P^l Q_i,$$

il che è impossibile, perchè gli elementi del quadro sono tutti diversi.

Abbiamo dunque $\frac{n}{\nu}$ poli equivalenti p, p_1, $p_2, \ldots, p_{\frac{n}{\nu}-1}$ tutti differenti tra loro, e possiamo concludere che:

Il numero dei poli diversi equivalenti ad un polo dato, compreso questo stesso, è eguale all'indice del sottogruppo formato dalle sostituzioni a cui appartiene quel polo.

È facile vedere che: *Ogni sostituzione del gruppo G ha per effetto uno scambio dei poli*

$$p, p_1, \ldots, p_{\frac{n}{\nu}-1}$$

tra loro.

Infatti prendiamo una sostituzione qualunque $P^h Q_k$ di G, ed applichiamola ad uno qualunque p_i dei poli considerati; avremo:

$$P^h Q_k(p_i) = Q_i P^h Q_k(p).$$

Ma $Q_i P^h Q_k$, come prodotto di sostituzioni di G, è una certa sostituzione $P^r Q_s$ di G; quindi:

$$P^h Q_k(p_i) = P^r Q_s(p) = p_s.$$

Un'osservazione importante è questa. I punti $p, p_1, p_2, \ldots$ sono poli dei sottogruppi Γ, $Q_1^{-1}\Gamma Q_1$, $Q_2^{-1}\Gamma Q_2$, ... Però dal fatto che quei punti sono tutti diversi non può dedursi che lo sieno anche questi sottogruppi, anzi essi coincidono due a due quando uno dei punti $p_1, p_2, \ldots$ è il secondo polo q di Γ, quando cioè i due poli di Γ sono equivalenti. Infatti, se $p_i = q$, le sostituzioni dei due sottogruppi Γ e $Q_i^{-1}\Gamma Q_i$, avendo un polo comune, hanno comune anche l'altro (art. 35), e però i due sottogruppi sono identici; e lo stesso avviene degli altri sottogruppi due a due, giacchè, se:

$$q = p_i = Q_i(p), \quad q_h = Q_h(q),$$

ne segue:

$$q_h = Q_i Q_h(p) = P^l Q_k(p) = p_k.$$

37. Le considerazioni esposte permettono di determinare tutti i possibili gruppi finiti di sostituzioni lineari.

Sia G un gruppo d'ordine n. I poli delle sue $n - 1$ sostituzioni diverse dall'identità, contati ciascuno tante volte quante sono le sostituzioni a cui

esso appartiene, sono in tutto $2n-2$. Supponiamo che un polo sia comune a ν_1 sostituzioni, compresa l'identità; allora (art. 36) esso farà parte d'un sistema di $\frac{n}{\nu_1}$ poli equivalenti. Analogamente vi saranno sistemi di $\frac{n}{\nu_2}, \frac{n}{\nu_3}, \dots, \frac{n}{\nu_r}$ poli equivalenti; e, tenuto conto che un polo dell'i-esimo sistema appartiene a $\nu_i - 1$ sostituzioni diverse dall'identità, sarà:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{n}{\nu_i}(\nu_i - 1) = 2n - 2,$$

ossia:

$$\sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) = 2 - \frac{2}{n}. \qquad (1)$$

Dobbiamo cercare i sistemi di numeri interi e positivi $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r, n$ che soddisfanno a questa equazione.

Evidentemente si ha:

$$n \geqq \nu_i \geqq 2 \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

quindi:

$$r > \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) \geqq \frac{r}{2}, \quad 2 > 2 - \frac{2}{n} \geqq 1,$$

donde segue, per la (1):

$$r > 1, \quad 2 > \frac{r}{2},$$

ossia:

$$1 < r < 4.$$

Cioè r non può prendere che i valori 2 e 3.

Sia $r = 2$; la (1) diviene:

$$\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} = \frac{2}{n},$$

che, per essere $\nu_1 \leqq n$, $\nu_2 \leqq n$, ammette l'unica soluzione:

$$\nu_1 = \nu_2 = n.$$

Sia ora $r = 3$, sicchè l'equazione (1) diviene:

$$\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1 + \frac{2}{n}. \tag{2}$$

Se tutte le ν_i fossero $\geqq 3$, il primo membro avrebbe valore $\leqq 1$, ciò che è impossibile. Dunque una almeno delle ν_i ha valore 2.

Poniamo per es. $\nu_1 = 2$, quindi:

$$\frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}.$$

Le ν_2, ν_3 non possono essere ambedue $\geqq 4$, giacchè allora il primo membro sarebbe $\leqq \frac{1}{2}$; quindi una di esse deve avere il valore 2 o il valore 3.

Supponiamo dapprima che una delle ν_2, ν_3 abbia il valore 2, per es. facciamo $\nu_2 = 2$; ne risulta $\nu_3 = \frac{n}{2}$, quindi n dev'essere pari.

Supponiamo invece che nè ν_2 nè ν_3 abbia il valore 2; una di esse dovrà avere il valore 3. Poniamo $\nu_2 = 3$; ne risulta:

$$\frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n},$$

donde $\nu_3 < 6$. Facendo pertanto $\nu_3 = 3, 4, 5$, si ottiene $n = 12, 24, 60$.

Riassumendo, si hanno le seguenti soluzioni dell'equazione (1), alle quali corrispondono altrettanti gruppi POSSIBILI di sostituzioni lineari:

	r	ν_1	ν_2	ν_3	n
I	2	n	n		n
II	3	2	2	m	$2m$
III	3	2	3	3	12
IV	3	2	3	4	24
V	3	2	3	5	60

Se questi gruppi esistano realmente, lo vedremo più innanzi (art. 52).

38. Le sostituzioni lineari fratte d'una variabile possono porsi sotto forma di sostituzioni lineari intere ed omogenee d'una coppia di variabili.

Data la sostituzione:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

e posto:

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \quad z' = \frac{z'_1}{z'_2},$$

si ha:

$$\frac{z'_1}{z'_2} = \frac{\alpha z_1 + \beta z_2}{\gamma z_1 + \delta z_2},$$

e quindi, indicando con λ un fattore qualunque:

$$(2)\quad z_1' = \lambda(\alpha z_1 + \beta z_2),\quad z_2' = \lambda(\gamma z_1 + \delta z_2).$$

Da ogni sostituzione non omogenea (1) risultano pertanto infinite sostituzioni omogenee (2). Però, se noi teniamo conto soltanto delle *sostituzioni omogenee unitarie,* di quelle cioè, il determinante dei cui coefficienti ha il valore 1, ad ogni sostituzione (1) corrisponderanno due sostituzioni (2); infatti il coefficiente λ sarà determinato dalla relazione:

$$\lambda^2(\alpha\delta - \beta\gamma) = 1,$$

che dà per esso i due valori:

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}}.$$

Se in particolare la sostituzione (1) è unitaria, i due valori di λ sono ± 1.

Se si ha un gruppo G di sostituzioni non omogenee, le corrispondenti sostituzioni omogenee formano evidentemente un gruppo G'; G' è emiedricamente isomorfo a G (e quindi di ordine doppio, se l'ordine di G è finito), e all'identità in G corrispondono in G' le due sostituzioni:

$$z_1' = z_1,\quad z_2' = z_2;\quad z_1' = -z_1,\quad z_2' = -z_2.$$

Pseudosostituzioni lineari.

39. Diremo *pseudosostituzione lineare* * quell'operazione, per cui si passa da un valore qualunque z ad un altro:

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}, \tag{1}$$

dove $\bar{z}$ denota il numero complesso coniugato di z, e:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

La quantità $\alpha\delta - \beta\gamma$ si dice il *determinante* della pseudosostituzione.

Non esiste alcuna pseudosostituzione che sia un'operazione identica.

Infatti, perchè la (1) muti in sè stesso il valore 0, dev'essere $\beta = 0$; perchè muti in sè stesso il valore ∞, dev'essere $\gamma = 0$; perchè muti in sè stesso il valore 1, dev'essere $\alpha = \delta$. Così la (1) si riduce a $z' = \bar{z}$. Ma questa non è un'operazione identica, perchè vi sono infiniti valori che essa non lascia invariati; infatti essa muta ogni valore complesso nel suo coniugato.

L'inversa d'una pseudosostituzione è una pseudosostituzione.

---

* Come per le sostituzioni, così per le pseudosostituzioni ometteremo spesso la parola *lineari*.

Dalla (1) segue infatti:

$$\bar{z} = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha};$$

prendendo i coniugati d'ambi i membri e scrivendo poi z' invece di z e viceversa, si ha di qui:

$$z' = \frac{\bar{\delta}\bar{z} - \bar{\beta}}{-\bar{\gamma}\bar{z} + \bar{\alpha}}.$$

Il prodotto di due pseudosostituzioni è una sostituzione.

Sia:

$$z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}, \quad z'' = \frac{\alpha'\bar{z}' + \beta'}{\gamma'\bar{z}' + \delta'}.$$

Dalla prima segue:

$$\bar{z}' = \frac{\bar{\alpha} z + \bar{\beta}}{\bar{\gamma} z + \bar{\delta}},$$

e sostituendo nella seconda:

$$z'' = \frac{(\alpha'\bar{\alpha} + \beta'\bar{\gamma})z + (\alpha'\bar{\beta} + \beta'\bar{\delta})}{(\gamma'\bar{\alpha} + \delta'\bar{\gamma})z + (\gamma'\bar{\beta} + \delta'\bar{\delta})}.$$

Il prodotto di una pseudosostituzione e di una sostituzione, o di una sostituzione e di una pseudosostituzione, è una pseudosostituzione.

Infatti dalle:

$$z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}, \quad z'' = \frac{\alpha' z' + \beta'}{\gamma' z' + \delta'}$$

segue:

$$z'' = \frac{(\alpha'\alpha + \beta'\gamma)\bar{z} + (\alpha'\beta + \beta'\delta)}{(\gamma'\alpha + \delta'\gamma)\bar{z} + (\gamma'\beta + \delta'\delta)},$$

e dalle:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z'' = \frac{\alpha'\bar{z}' + \beta'}{\gamma'\bar{z}' + \delta'}$$

segue:

$$z'' = \frac{(\alpha'\bar{\alpha} + \beta'\bar{\gamma})\bar{z} + (\alpha'\bar{\beta} + \beta'\bar{\delta})}{(\gamma'\bar{\alpha} + \delta'\bar{\gamma})\bar{z} + (\gamma'\bar{\beta} + \delta'\bar{\delta})}.$$

Ogni pseudosostituzione è il prodotto della pseudosostituzione $z' = -\bar{z}$ *e di una sostituzione.*

Si verifica infatti immediatamente che la (1) è il prodotto della $z' = -\bar{z}$ e della sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix}$.

La pseudosostituzione $z' = -\bar{z}$, che scambia fra loro i punti simmetrici rispetto all'asse imaginario, può dirsi *riflessione* rispetto a quest'asse.

40. Considerando una pseudosostituzione Q:

$$z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta} \tag{1}$$

come una trasformazione in sè stesso del piano della variabile complessa, possiamo chiederci se vi sieno punti che rimangano invariati in tale trasformazione.

È evidente anzitutto che, se un punto rimane fisso per la pseudosostituzione Q, esso rimane pure

fisso per la sostituzione Q^2; quindi, tranne il caso in cui Q^2 sia la sostituzione identica, Q non potrà lasciare invariati che tutt'al più due punti.

Consideriamo dapprima il caso in cui $Q^2 = 1$, e quindi Q è un'operazione di 2° ordine. Si ha (art. 39):

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\gamma} & \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\delta} \\ \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\gamma} & \gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\delta} \end{pmatrix},$$

quindi, per l'ipotesi fatta:

$$(2) \quad \alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\gamma}=\gamma\bar{\beta}+\delta\bar{\delta}, \quad \alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\delta}=0, \quad \gamma\bar{\alpha}+\delta\bar{\gamma}=0.$$

Se $\beta = \gamma = 0$, si ha dalla prima delle (2) $|\alpha| = |\delta|$, sicchè la Q diviene:

$$z' = e^{i\lambda}\bar{z},$$

od anche:

$$z' = \frac{\alpha\bar{z}}{-\bar{\alpha}},$$

preso $\alpha = e^{i\frac{\lambda-\pi}{2}}$.

Se le β, γ non sono ambedue nulle, suppongasi per es. $\gamma \neq 0$. Allora si potrà imaginare di aver moltiplicato i quattro coefficienti di Q per una quantità tale da rendere reale γ, dopo di che le (2) diverranno:

$$\alpha\bar{\alpha}+\beta\gamma=\gamma\bar{\beta}+\delta\bar{\delta}, \quad \alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\delta}=0, \quad \gamma(\bar{\alpha}+\delta)=0.$$

L'ultima di queste relazioni ci dà $\bar{\alpha} + \delta = 0$, ossia $\delta = -\bar{\alpha}$, da cui $|\alpha| = |\delta|$, ed allora la prima diviene:

$$\gamma(\beta - \overline{\beta}) = 0,$$

donde $\beta = \overline{\beta}$; la seconda risulta dopo ciò identicamente soddisfatta.

Osservando che la condizione $\delta = -\overline{\alpha}$ sussiste anche per $\beta = \gamma = 0$, può concludersi che:

La forma generale delle pseudosostituzioni di 2° ordine è:

$$z' = \frac{\alpha \overline{z} + \beta}{\gamma \overline{z} - \overline{\alpha}}, \tag{3}$$

dove β *e* γ *sono reali.*

Per trovare i punti che restano invariati per la (3), basta porre in essa $z' = z$. Si ha allora:

$$\gamma z \overline{z} - \overline{\alpha} z - \alpha \overline{z} - \beta = 0, \tag{4}$$

che, come è facile vedere, rappresenta un cerchio di centro $\frac{\alpha}{\gamma}$ e di raggio:

$$\rho = \frac{\sqrt{\alpha \overline{\alpha} + \beta \gamma}}{\gamma} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{\gamma},$$

dove Δ (che è sempre reale) è il determinante della pseudosostituzione *. Secondochè $\Delta \gtrless 0$, il

* Poniamo infatti:

$$z = x + iy, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2;$$

avremo:

$$\gamma(x^2 + y^2) - 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y - \beta = 0$$

ossia:

$$\left(x - \frac{\alpha_1}{\gamma}\right)^2 + \left(y - \frac{\alpha_2}{\gamma}\right)^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta\gamma}{\gamma^2}.$$

cerchio è imaginario o reale; esso si riduce ad una retta per $\gamma = 0$. Dunque:

La pseudosostituzione di 2°. *ordine* (3) *non lascia invariato alcun punto del piano, o lascia invariati tutti i punti d'un cerchio, secondochè il suo determinante è positivo o negativo. Per* $\gamma = 0$, *il cerchio si riduce ad una retta.*

Il cerchio (4) dicesi *cerchio di simmetria* della pseudosostituzione.

41. Cerchiamo in quale rapporto di posizione stieno due punti legati dalla relazione (3) dell'articolo precedente.

Sia dapprima $\gamma = 0$; il cerchio di simmetria si riduce alla retta:

$$\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z + \beta = 0.$$

Se ζ è un punto di questa retta, si ha:

$$\alpha \bar{\zeta} + \bar{\alpha} \zeta + \beta = 0. \tag{1}$$

La pseudosostituzione è, nel caso che consideriamo:

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{-\bar{\alpha}},$$

da cui, qualunque sia ζ:

$$-\bar{\alpha}(z' - \zeta) = \alpha \bar{z} + \beta + \bar{\alpha} \zeta,$$

e in particolare, se ζ appartiene alla retta di simmetria, per la (1):

$$-\bar{\alpha}(z' - \zeta) = \alpha(\bar{z} - \bar{\zeta}),$$

da cui, ricordando che nel caso considerato è $|\alpha| = 1$:

$$|z' - \zeta| = |\overline{z} - \overline{\zeta}| = |z - \zeta|.$$

Cioè la retta di simmetria è il luogo dei punti equidistanti da z' e da z; ossia *i punti z, z' sono simmetrici rispetto alla retta di simmetria.*

Sia ora $\gamma \neq 0$. Essendo:

$$z' = \frac{\alpha \overline{z} + \beta}{\gamma \overline{z} - \overline{\alpha}},$$

si ha, qualunque sia ζ:

$$z' - \zeta = \frac{\alpha \overline{z} + \beta - \gamma \overline{z} \zeta + \overline{\alpha} \zeta}{\gamma \overline{z} - \overline{\alpha}}.$$

Ora l'equazione del cerchio di simmetria può scriversi, considerando che $\frac{\alpha}{\gamma}$ è il centro:

$$\left| z - \frac{\alpha}{\gamma} \right| = \text{cost.}$$

Indicando quindi con ζ un punto qualunque del cerchio, si ha:

$$\gamma \zeta \overline{\zeta} - \alpha \overline{\zeta} - \overline{\alpha} \zeta - \beta = 0, \quad |\gamma \zeta - \alpha| = \text{cost.},$$

e per conseguenza:

$$z' - \zeta = \frac{\alpha \overline{z} - \gamma \overline{z} \zeta + \gamma \zeta \overline{\zeta} - \alpha \overline{\zeta}}{\gamma \overline{z} - \overline{\alpha}} = - \frac{\gamma \zeta - \alpha}{\gamma \overline{z} - \overline{\alpha}} (\overline{z} - \overline{\zeta}).$$

Prendendo i moduli d'ambi i membri, e tenendo conto della relazione $|\gamma \zeta - \alpha| = \text{cost.}$, si ha di qui che il rapporto $\frac{|z' - \zeta|}{|\overline{z} - \overline{\zeta}|}$, ossia $\frac{|z' - \zeta|}{|z - \zeta|}$,

è indipendente da ζ, purchè sia ζ un punto del cerchio di simmetria. Ciò dimostra che *i punti* z, z' *sono coniugati rispetto al cerchio di simmetria.*

Osserviamo che questo risultato comprende come caso particolare quello trovato per $\gamma = 0$. Possiamo perciò concludere in generale che:

Due punti corrispondenti rispetto ad una pseudosostituzione di secondo ordine sono coniugati rispetto al cerchio di simmetria di questa pseudosostituzione. Invece che coniugati, diremo qualche volta che essi sono *simmetrici;* e chiameremo una pseudosostituzione di 2° ordine una *riflessione* rispetto al suo cerchio di simmetria.

Proiettiamo stereograficamente il piano sopra una sfera. Il cerchio di simmetria, che diremo γ, della riflessione avrà per proiezione sulla sfera un cerchio γ_1. Sieno z, z' due punti corrispondenti rispetto alla riflessione considerata; poichè essi sono coniugati rispetto a γ, ogni cerchio passante per questi due punti taglia γ ortogonalmente. Ora, siccome nella proiezione stereografica le grandezze degli angoli si conservano, le proiezioni z_1, z'_1 di z, z' sulla sfera avranno la stessa proprietà rispetto al cerchio γ_1.

Se in particolare γ_1 è un cerchio massimo, allora, affinchè i punti z_1, z'_1 abbiano questa proprietà, essi dovranno essere simmetrici rispetto a γ_1 nel senso ordinario. Dunque:

Se si proietta stereograficamente una riflessione sopra una sfera in modo che il cerchio di simmetria abbia per proiezione un cerchio massimo, le proiezioni di due punti del piano corrispondente rispetto alla riflessione sono due punti della sfera simmetrici (nel senso ordinario) *rispetto a quel cerchio massimo.*

42. Consideriamo ora una pseudosostituzione Q che non sia del secondo ordine:

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta},$$

e poniamo:

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\gamma} & \alpha \bar{\beta} + \beta \bar{\delta} \\ \gamma \bar{\alpha} + \delta \bar{\gamma} & \gamma \bar{\beta} + \delta \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$A + D = \alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\gamma} + \gamma \bar{\beta} + \delta \bar{\delta},$$

che è evidentemente una quantità reale; dunque (art. 24):

Il quadrato d'una pseudosostituzione non può essere una sostituzione lossodromica.

A seconda che Q^2 è ellittica, iperbolica o parabolica, Q dicesi *ellittica, iperbolica* o *parabolica.*

43. Come si è già osservato, i soli punti che possono rimanere fissi per una pseudosostituzione Q sono i poli di Q^2. Vediamo in quali casi questi punti rimangano effettivamente fissi.

Indicando con p, q i due poli della Q^2, che possono essere distinti o no, si ha (art. 23):

$$(1) \qquad \left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = \frac{A - D \pm \sqrt{(A+D)^2 - 4}}{2C},$$

supposto, ciò che è sempre lecito:

$$(2) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

e quindi:

$$\overline{\alpha}\,\overline{\delta} - \overline{\beta}\,\overline{\gamma} = 1,$$

$$AD - BC = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\overline{\alpha}\,\overline{\delta} - \overline{\beta}\,\overline{\gamma}) = 1.$$

Perchè il punto p resti fisso per la Q, dev'essere:

$$p = \frac{\alpha\overline{p} + \beta}{\gamma\overline{p} + \delta},$$

ossia:

$$\gamma p\overline{p} + \delta p - \alpha\overline{p} - \beta = 0,$$

che può anche scriversi, moltiplicando per γ e tenendo conto della (2):

$$(3) \qquad (\gamma p - \alpha)(\gamma\overline{p} + \delta) = -1.$$

Per riconoscere se questa relazione sussiste, dobbiamo stabilire alcune identità.

Si ha anzitutto:

$$(4) \qquad A - \overline{D} = \overline{A} - D = \alpha\overline{\alpha} - \delta\overline{\delta}.$$

Inoltre, poichè (art. 39) l'espressione della pseudosostituzione Q^{-1} è:

$$z' = \frac{\overline{\delta}\,\overline{z} - \overline{\beta}}{-\overline{\gamma}\,\overline{z} + \overline{\alpha}},$$

si ha per l'espressione dei prodotti $Q^2 Q^{-1}$ e $Q^{-1} Q^2$ rispettivamente (ivi):

$$z' = \frac{(\bar{A}\bar{\delta} - \bar{C}\bar{\beta})\bar{z} + (\bar{B}\bar{\delta} - \bar{D}\bar{\beta})}{(-\bar{A}\bar{\gamma} + \bar{C}\bar{\alpha})\bar{z} + (-B\bar{\gamma} + \bar{D}\bar{\alpha})},$$

$$z' = \frac{(A\bar{\delta} - B\bar{\gamma})\bar{z} + (-A\bar{\beta} + B\bar{\alpha})}{(C\bar{\delta} - D\bar{\gamma})\bar{z} + (-C\bar{\beta} + D\bar{\alpha})};$$

ma:

$$Q^2 Q^{-1} = Q^{-1} Q^2 = Q,$$

quindi:

$$(5) \quad \begin{cases} \bar{A}\bar{\delta} - \bar{C}\bar{\beta} = A\bar{\delta} - B\bar{\gamma} = \alpha \\ \bar{B}\bar{\delta} - \bar{D}\bar{\beta} = -A\bar{\beta} + B\bar{\alpha} = \beta \\ -\bar{A}\bar{\gamma} + \bar{C}\bar{\alpha} = C\bar{\delta} - D\bar{\gamma} = \gamma \\ -\bar{B}\bar{\gamma} + \bar{D}\bar{\alpha} = -C\bar{\beta} + D\bar{\alpha} = \delta. \end{cases}$$

Dopo ciò scriviamo la (1) così:

$$\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = \frac{A - D \pm R}{2C},$$

dove R è nullo, reale e diverso da zero o imaginario puro, secondochè Q è parabolica, iperbolica od ellittica. Essendo dunque:

$$p = \frac{A - D + R}{2C},$$

sarà:

$$\bar{p} = \frac{\bar{A} - \bar{D} \pm R}{2\bar{C}},$$

dove deve prendersi il segno superiore se Q è iperbolica, l'inferiore se Q è ellittica (se Q è parabolica, $R = \bar{R} = 0$, quindi il segno è indifferente). Di qui segue:

$$\gamma p - \alpha = \frac{1}{2C}(\gamma A - \gamma D - 2\alpha C + \gamma R),$$

$$\gamma \bar{p} + \delta = \frac{1}{2\bar{C}}(\gamma \bar{A} - \gamma \bar{D} + 2\delta \bar{C} \pm \gamma R),$$

e quindi in virtù della (4) e delle equazioni che si ottengono prendendo i coniugati d'ambo i membri delle (5):

$$\gamma p - \alpha = \frac{1}{2C}[\gamma A + \gamma(A - \bar{D} - \bar{A}) - 2\alpha C + \gamma R]$$

$$= \frac{1}{2C}[2(\gamma A - \alpha C) - \gamma(\bar{A} + \bar{D}) + \gamma R]$$

$$= \frac{1}{2C}[-2\bar{\gamma} - \gamma(A + D) + \gamma R],$$

$$\gamma \bar{p} + \delta = \frac{1}{2\bar{C}}[\gamma(A + D - \bar{D}) - \gamma \bar{D} + 2\delta \bar{C} \pm \gamma R]$$

$$= \frac{1}{2\bar{C}}[-2(\gamma \bar{D} - \delta \bar{C}) + \gamma(A + D) \pm \gamma R]$$

$$= \frac{1}{2\bar{C}}[2\bar{\gamma} + \gamma(A + D) \pm \gamma R].$$

Quest'ultima relazione può scriversi:

$$\gamma \bar{p} + \delta = \frac{1}{2\bar{C}}[2\bar{\gamma} + \gamma(A + D) + \gamma R - 2\varepsilon R],$$

dove $\varepsilon = 0$ oppure $= -\gamma$ secondochè Q è iperbolica od ellittica. Ne risulta:

$$(\gamma p - \alpha)(\gamma \bar{p} + \delta)$$
$$= -\frac{1}{4C\bar{C}}\{[2\bar{\gamma} + \gamma(A + D)]^2 - \gamma^2 R^2 - \varepsilon T\},$$

dove:

$$T = -2R[-2\bar{\gamma} - \gamma(A+D) + \gamma R].$$

Sviluppando, e ricordando l'espressione di R, si ha:

$$(\gamma p - \alpha)(\gamma \bar{p} + \delta)$$
$$= -\frac{1}{4C\bar{C}}[4\bar{\gamma}^2 + 4\bar{\gamma}\gamma(A+D) + 4\gamma^2 - \varepsilon T]$$
$$= -\frac{1}{C\bar{C}}[\bar{\gamma}^2 + \bar{\gamma}\gamma(A+D) + \gamma^2] + \frac{\varepsilon T}{4C\bar{C}}.$$

D'altra parte:

$$C\bar{C} = (\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\gamma})(\bar{\gamma}\alpha + \bar{\delta}\gamma)$$
$$= \alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma} + \gamma^2\bar{\alpha}\bar{\delta} + \bar{\gamma}^2\alpha\delta + \gamma\bar{\gamma}\delta\bar{\delta}$$
$$= \alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma} + \gamma^2(\bar{\beta}\bar{\gamma} + 1) + \bar{\gamma}^2(\beta\gamma + 1) + \gamma\bar{\gamma}\delta\bar{\delta}$$
$$= \gamma^2 + \bar{\gamma}^2 + \gamma\bar{\gamma}(A+D),$$

quindi:

$$(\gamma p - \alpha)(\gamma \bar{p} + \delta) = -1 + \frac{\varepsilon T}{4C\bar{C}}.$$

Confrontando colla (3), si ha $\varepsilon = 0$. Può dunque concludersi che: *Se Q è parabolica od iperbolica, essa lascia invariati uno o due punti, cioè il polo o i poli di Q^2; se essa è ellittica, non lascia invariato alcun punto.*

Può aggiungersi che: *Se Q è ellittica, essa scambia tra loro i due poli di Q^2.* Sia infatti p uno di questi poli, e la Q muti p in un altro punto s. Poichè Q^2 lascia invariato p, deve Q

mutare s in p; cioè i punti p, s si scambiano fra loro per effetto della Q. Ma allora è chiaro che Q^2 lascia invariato anche s, sicchè s è il secondo polo di Q^2.

44. *Se si trasforma una sostituzione non lossodromica mediante una riflessione rispetto ad una sua traiettoria, la sostituzione trasformata è eguale alla primitiva.*

Consideriamo nuovamente il piano Z degli art. 27, 30. Una sostituzione ellittica od iperbolica P prende la forma:

$$Z' = \theta Z,$$

dove $|\theta| = 1$ nel 1° caso, θ è reale e positivo nel 2°. Le traiettorie sono rispettivamente i cerchi col centro nell'origine e i raggi uscenti dall'origine.

Una riflessione R rispetto ad un cerchio col centro nell'origine, di raggio r, ha la forma:

$$Z' = \frac{r^2}{\overline{Z}}.$$

Per formare la RPR, dobbiamo eliminare Z', Z'' tra le:

$$Z' = \frac{r^2}{\overline{Z}}, \quad Z'' = \theta Z', \quad Z''' = \frac{r^2}{\overline{Z''}};$$

supposto $|\theta| = 1$, si ottiene:

$$Z''' = \theta Z,$$

sicchè $RPR = P$.

Una riflessione R rispetto ad un raggio di

argomento α uscente dall'origine ha la forma:

$$Z' = e^{2i\alpha}\overline{Z}.$$

Per formare la RPR, dobbiamo eliminare Z' e Z'' tra le:

$$Z' = e^{2i\alpha}\overline{Z}, \quad Z'' = \theta Z', \quad Z''' = e^{2i\alpha}\overline{Z}'';$$

supposto θ reale e positivo, si ottiene:

$$Z''' = \theta Z,$$

sicchè $RPR = P$.

Nel caso d'una sostituzione parabolica:

$$Z' = \eta + Z,$$

dove possiamo anche supporre η reale, la riflessione R rispetto ad una traiettoria costituita da una retta parallela all'asse reale e distante da esso di h è:

$$Z' = 2ih + \overline{Z}.$$

Eliminando Z', Z'' tra le:

$$Z' = 2ih + \overline{Z}, \quad Z'' = \eta + Z', \quad Z''' = 2ih + \overline{Z}'',$$

si ottiene:

$$Z''' = \eta + Z,$$

sicchè anche qui $RPR = P$.

45. *Se un gruppo di sostituzioni G è permutabile* (art. 12) *con una riflessione R, e se P denota in generale un elemento di G, le operazioni P, PR* (*oppure P, RP*) *costituiscono un gruppo $\overline{G}$,* il quale si dice ottenuto da G mediante *ampliamento.* Se G è di ordine finito, l'ordine di $\overline{G}$ è doppio di quello di G.

Sieno P_1, P_2 due sostituzioni qualunque di

G, e pongasi:

$$RP_1R = P'_1, \quad RP_2R = P'_2,$$

dove, per l'ipotesi del teorema, P'_1, P'_2 appartengono pure a G.

Consideriamo i 4 prodotti:

$$P_1P_2, \quad P_1R.P_2, \quad P_1.P_2R, \quad P_1R.P_2R.$$

Il primo è evidentemente un elemento di G. Il secondo può scriversi $P_1P'_2R$, ossia $P_1P'_2.R$, e quindi è della forma PR. Della stessa forma è il terzo. Finalmente il quarto può scriversi $P_1.RP_2.R$, ossia $P_1P'_2R^2$, od infine $P_1P'_2$, sicchè appartiene a G. Con ciò resta dimostrato il teorema.

46. *Se un gruppo* G (finito od infinito) *di sostituzioni ha la proprietà che qualunque suo elemento può porsi sotto forma di prodotto i cui fattori appartengono ad un insieme finito di sostituzioni* P_1, P_2, ..., P_r, *e se una riflessione* R *trasforma ciascuna di queste sostituzioni in sostituzioni di* G, *il gruppo* G *può ampliarsi mediante la riflessione* R.

Pongasi in generale:

$$RP_iR = P'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Se:

$$P_{i_1}^{\alpha_1}P_{i_2}^{\alpha_2}P_{i_3}^{\alpha_3} \ldots,$$

dove i_1, i_2, i_3, ... sono numeri, non necessariamente diversi, appartenenti alla serie 1, 2, ..., r, è una sostituzione qualunque di G, si trova senza difficoltà:

$$R P_{i_1}^{\alpha_1} P_{i_2}^{\alpha_2} P_{i_3}^{\alpha_3} \ldots R = P'^{\alpha_1}_{i_1} P'^{\alpha_2}_{i_2} P'^{\alpha_3}_{i_3} \ldots,$$

sicchè il teorema è dimostrato.

47. *Se P è la sostituzione a poli distinti p, q:*

$$\frac{z' - p}{z' - q} = \theta \frac{z - p}{z - q},$$

e se Q è la pseudosostituzione:

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta},$$

l'espressione della sostituzione $Q^{-1} P Q = P'$ è:

$$\frac{z' - p'}{z' - q'} = \bar{\theta} \frac{z - p'}{z - q'},$$

dove:

$$p' = \frac{\alpha \bar{p} + \beta}{\gamma \bar{p} + \delta}, \quad q' = \frac{\alpha \bar{q} + \beta}{\gamma \bar{q} + \delta}.$$

Eliminando infatti z', z'' tra le:

$$z = \frac{\alpha \bar{z}' + \beta}{\gamma \bar{z}' + \delta}, \quad \frac{z'' - p}{z'' - q} = \theta \frac{z' - p}{z' - q}, \quad z''' = \frac{\alpha \bar{z}'' + \beta}{\gamma \bar{z}'' + \delta},$$

si ottiene:

$$\frac{\dfrac{\bar{\delta} \bar{z}''' - \bar{\beta}}{-\bar{\gamma} \bar{z}''' + \bar{\alpha}} - p}{\dfrac{\bar{\delta} \bar{z}''' - \bar{\beta}}{-\bar{\gamma} \bar{z}''' + \bar{\alpha}} - q} = \theta \frac{\dfrac{\bar{\delta} \bar{z} - \bar{\beta}}{-\bar{\gamma} \bar{z} + \bar{\alpha}} - p}{\dfrac{\bar{\delta} \bar{z} - \bar{\beta}}{-\bar{\gamma} \bar{z} + \bar{\alpha}} - q},$$

ossia:

$$\frac{\bar{z}''' - \dfrac{\bar{\alpha} p + \bar{\beta}}{\bar{\gamma} p + \bar{\delta}}}{\bar{z}''' - \dfrac{\bar{\alpha} q + \bar{\beta}}{\bar{\gamma} q + \bar{\delta}}} = \theta \frac{\bar{z} - \dfrac{\bar{\alpha} p + \bar{\beta}}{\bar{\gamma} p + \bar{\delta}}}{\bar{z} - \dfrac{\bar{\alpha} q + \bar{\beta}}{\bar{\gamma} q + \bar{\delta}}},$$

e prendendo i coniugati d'ambo i membri:

$$\frac{z''' - \dfrac{\alpha \bar{p} + \beta}{\gamma \bar{p} + \delta}}{z''' - \dfrac{\alpha \bar{q} + \beta}{\gamma \bar{q} + \delta}} = \bar{\theta} \frac{z - \dfrac{\alpha \bar{p} + \beta}{\gamma \bar{p} + \delta}}{z - \dfrac{\alpha \bar{q} + \beta}{\gamma \bar{q} + \delta}},$$

come si doveva dimostrare.

Può dirsi dunque che:

a) I poli di P' sono i trasformati mediante Q dei poli di P;

b) Se P è iperbolica, lo è pure P', e le due sostituzioni hanno lo stesso coefficiente θ;

c) Se P è ellittica, lo è pure P', e i coefficienti θ delle due sostituzioni sono coniugati.

48. *Se P è la sostituzione a polo unico:*

$$\frac{1}{z' - r} = n + \frac{1}{z - r},$$

e se Q è la pseudosostituzione:

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta},$$

dove si suppone $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, l'espressione della sostituzione $Q^{-1} P Q = P'$ è:

$$\frac{1}{z'-r'} = n' + \frac{1}{z-r'},$$

dove:

$$r' = \frac{\alpha\bar{r}+\beta}{\gamma\bar{r}+\delta}, \quad n' = \bar{n}(\bar{\gamma}\bar{r}+\bar{\delta})^2.$$

Eliminando z', z'' tra le:

$$z = \frac{\alpha\bar{z}'+\beta}{\gamma\bar{z}'+\delta}, \quad \frac{1}{z''-r} = n + \frac{1}{z'-r}, \quad z''' = \frac{\alpha\bar{z}''+\beta}{\gamma\bar{z}''+\delta},$$

si ottiene:

$$\frac{1}{\dfrac{\bar{\delta}\bar{z}'''-\bar{\beta}}{-\bar{\gamma}\bar{z}'''+\bar{\alpha}}-r} = n + \frac{1}{\dfrac{\bar{\delta}\bar{z}-\bar{\beta}}{-\bar{\gamma}\bar{z}+\bar{\alpha}}-r},$$

ossia, colle stesse riduzioni dell'art. 32:

$$\frac{1}{\bar{z}'''-\dfrac{\bar{\alpha}r+\bar{\beta}}{\bar{\gamma}r+\bar{\delta}}} = n(\gamma r+\delta)^2 + \frac{1}{\bar{z}-\dfrac{\bar{\alpha}r+\bar{\beta}}{\bar{\gamma}r+\bar{\delta}}},$$

e prendendo i coniugati d'ambo i membri:

$$\frac{1}{z'''-\dfrac{\alpha\bar{r}+\beta}{\gamma\bar{r}+\delta}} = \bar{n}(\bar{\gamma}\bar{r}+\bar{\delta})^2 + \frac{1}{z-\dfrac{\alpha\bar{r}+\beta}{\gamma\bar{r}+\delta}}.$$

Gruppi finiti di rotazioni d'una sfera sopra sè stessa, e loro ampliamenti.

49. Dopo avere stabilito le proprietà delle sostituzioni e pseudosostituzioni lineari, dobbiamo

passare allo studio dei gruppi di sostituzioni, e particolarmente dei gruppi finiti, e dei gruppi di sostituzioni ampliati.

Di gruppi non finiti avremo a considerarne uno solo, il *gruppo modulare,* e di esso daremo più innanzi la definizione aritmetica diretta.

Quanto ai gruppi finiti, noi giungeremo molto facilmente alla loro costruzione mediante un artifizio geometrico al quale abbiamo già accennato (art. 28).

Rammentiamo che i gruppi finiti constano di sole sostituzioni ellittiche (art. 33).

Abbiasi una sostituzione ellittica coi poli p, q rappresentati dai punti P, Q *, e consideriamo la famiglia di cerchi Γ rispetto a cui P e Q sono punti coniugati. Per effetto della sostituzione ogni cerchio Γ si muta in sè stesso, ed un punto Z di questo cerchio si muta in un altro Z' tale che la differenza degli angoli $QZ'P$, QZP sia costante (art. 29).

Nel piano perpendicolare al piano z passante per P, Q scegliamo un punto V tale che l'angolo PVQ sia retto, poi, condotta per V la perpendicolare CV al piano z, descriviamo la sfera di centro C e di raggio CV. Proiettiamo stereografica-

* Nella figura si sono segnate a tratto pieno le linee poste sul piano z, a tratto interrotto le altre.

mente il piano sulla sfera dal punto V, e indichiamo in generale con M_1 la proiezione sulla sfera d'un

(Fig. 2).

punto M del piano. Poichè C sta sulla PQ, il piano VPQ passa pel centro C della sfera, quindi P_1, Q_1 stanno sopra un cerchio massimo passante per V (il contorno apparente della sfera); e poichè inoltre l'angolo PVQ è retto, $P_1 Q_1$ è un diametro della sfera. Sieno A, B i punti d'incontro della retta PQ con uno qualunque dei cerchi Γ; il gruppo di punti $PQAB$ sarà armonico, quindi lo sarà pure il fascio $V(PQAB)$; ma VP, VQ sono ortogonali, quindi essi sono le bisettrici degli angoli formati da VA, VB. Pertanto P_1 è il punto di mezzo dell'arco $A_1 B_1$, la retta

$A_1 B_1$ è perpendicolare alla $P_1 Q_1$, e la projezione stereografica del cerchio AB è un cerchio $A_1 B_1$ posto in un piano perpendicolare al diametro $P_1 Q_1$.

Per la sostituzione considerata:

$$(1) \qquad \frac{z' - p}{z' - q} = \theta \frac{z - p}{z - q} = e^{i\alpha} \frac{z - p}{z - q}$$

un punto Z del cerchio AB si trasforma in un altro punto Z' dello stesso cerchio tale che i segmenti di cerchio PZQ, $PZ'Q$ facciano tra loro l'angolo α. I segmenti PZQ, $PZ'Q$ si proiettano sulla sfera nei semicerchi massimi $P_1 Z_1 Q_1$, $P_1 Z_1' Q_1$, e, per la permanenza degli angoli nella proiezione stereografica, l'angolo dei piani di questi due semicerchi è eguale ad α.

Dunque alla sostituzione lineare considerata corrisponde sulla sfera una rotazione di ampiezza α intorno al diametro $P_1 Q_1$. I punti P_1, Q_1 possono dirsi *poli* della rotazione.

Per determinare il senso in cui avviene la rotazione, consideriamo un caso speciale, quello in cui $p = 0$, $q = \infty$. Allora la sostituzione assume la forma più semplice:

$$z' = \theta z = e^{i\alpha} z,$$

e rappresenta una rotazione del piano su sè stesso intorno all'origine, di ampiezza α nel senso che va dall'asse x positivo all'asse y positivo, cioè da destra a sinistra. Ad essa corrisponde una rotazione della sfera su sè stessa, di ampiezza α, da destra

a sinistra, intorno all'asse VW. Ma poichè nel caso considerato P_1 coincide con W e Q_1 con V, può dirsi che si ha una rotazione della sfera di ampiezza α da sinistra a destra intorno all'asse $P_1 Q_1$ *).

Se dunque si considerano come positive le rotazioni da destra a sinistra, può concludersi che alla sostituzione (1) corrisponde una rotazione della sfera di ampiezza $-\alpha$ intorno all'asse $P_1 Q_1$.

È degno di nota che, mentre la trasformazione del piano ζ in sè stesso che rappresenta la sostituzione lineare (1) è accompagnata in generale da una deformazione, la trasformazione della sfera in sè stessa consiste semplicemente in una rotazione della sfera intorno ad un suo diametro.

50. È noto che la successione di due rotazioni intorno a due assi concorrenti equivale ad un'unica rotazione intorno ad un asse passante pel loro punto d'incontro. Quindi le rotazioni di una sfera sopra sè stessa costituiscono un gruppo. Ogni sottogruppo di questo può considerarsi come l'imagine di un gruppo di sostituzioni lineari ellittiche **,

* Cioè che appare diretta da sinistra a destra ad una persona che sta coi piedi in Q_1 e colla testa in P_1.

** I poli di queste sostituzioni non possono essere disposti comunque nel piano. Infatti, se P, Q sono i poli di una qualunque di esse, deve esistere un punto V tale che i piani PVQ sieno perpendicolari al piano ζ, e gli angoli PVQ sieno retti.

ed è quindi oloedricamente isomorfo ad un tal gruppo, ossia è ad esso identico dal punto di vista formale. Ora noi impareremo a costruire dei gruppi finiti di rotazioni, che corrispondono rispettivamente ai gruppi di sostituzioni lineari compresi nella tabella dell'articolo 37; e di qui potremo concludere che tutti i gruppi, di cui abbiamo più sopra dimostrato la possibilità, esistono realmente.

Un primo tipo di gruppi finiti di rotazioni è quello dei gruppi ciclici (art. 6), uno dei quali è costituito da una rotazione la cui ampiezza stia in un rapporto razionale con 2π, e dalle sue potenze. Se questo rapporto, ridotto ai minimi termini, è $\frac{k}{n}$, il gruppo è di ordine n; lo indicheremo con C_n.

Ciascuno dei due poli comuni a tutte le rotazioni del gruppo è equivalente soltanto a sè stesso, giacchè il gruppo non contiene alcuna rotazione che scambi tra loro i due poli; si ha dunque colla notazione dell'art. 37:

$$r = 2, \quad \frac{n}{\nu_1} = 1, \quad \frac{n}{\nu_2} = 1,$$

e per conseguenza $\nu_1 = \nu_2 = n$. *I gruppi ciclici corrispondono pertanto al tipo I della tabella.*

51. Per costruire gli altri gruppi finiti noi ricorreremo ai poliedri regolari, che imagineremo iscritti nella sfera. Però, oltre ai cinque noti corpi regolari, che diremo *poliedri propri*, noi dovremo considerarne anche un sesto, degenere, che diremo *diedro*, formato da due facce poligonali regolari coincidenti. Esso si riterrà iscritto nella sfera, quando il poligono regolare da cui è costituito sarà iscritto in un cerchio massimo della sfera, e il diametro perpendicolare al piano di questo cerchio massimo si dirà *asse* del diedro.

Se il poligono ha m lati, il diedro si chiamerà *m-gonale*. Per $m = 2$ si ha un ulteriore stadio di degenerazione; il diedro si riduce semplicemente ad un segmento di retta, il quale si intenderà iscritto in una sfera quando ne costituisce un diametro. In tal caso ogni diametro perpendicolare a questo dovrebbe chiamarsi asse del diedro; noi però ne considereremo come tale uno solo, cioè intenderemo che il poligono costituente il diedro, riducendosi in modo continuo ad una coppia di segmenti coincidenti, non cessi di giacere in un determinato piano, che anche al limite si considererà come il piano del poligono degenere.

Dopo ciò abbiasi un poliedro regolare iscritto in una sfera. Presi due spigoli qualunque AB, CD di esso, esiste una ed una sola rotazione della sfera che fa coincidere AB con CD, e parimenti

ne esiste una sola che fa coincidere AB con DC *.

Ora ogni rotazione della sfera che porta a coincidenza uno spigolo del poliedro con un altro fa coincidere il poliedro con sè stesso; e reciprocamente ogni rotazione che fa coincidere il poliedro con sè stesso porta a coincidenza ogni suo spigolo con un altro spigolo. Si avrà quindi l'insieme delle rotazioni che trasformano in sè stesso il poliedro, prendendo tutte le rotazioni che portano a coincidere un determinato suo spigolo con sè stesso e con tutti gli altri spigoli in ambi i sensi. Se S è il numero degli spigoli del poliedro, il numero delle rotazioni che lo trasformano in sè stesso, compresa la rotazione nulla, è dunque $2S$. Ora tutte queste rotazioni formano evidentemente un gruppo, giacchè il prodotto di due rotazioni aventi la proprietà di trasformare in sè stesso il poliedro possiede parimenti questa proprietà; può concludersi dunque che:

Le rotazioni che trasformano in sè stesso un poliedro regolare costituiscono un gruppo, il cui ordine è dato dal doppio del numero degli spigoli del poliedro.

Pertanto ai sei poliedri regolari (compreso il

---

* V. p. es.: MARCOLONGO, *Meccanica razionale,* Milano, Hoepli, 1905, Vol. I, p. 59 e segg.

diedro) corrispondono sei gruppi finiti di rotazioni della sfera su sè stessa.

Però questi gruppi non sono tutti diversi.

Abbiasi un poliedro regolare proprio iscritto in una sfera, e insieme ad esso si consideri il suo *polare*, cioè il poliedro avente per vertici i centri sferici * delle facce del poligono dato. È chiaro che ogni rotazione che muta in sè stesso il poliedro primitivo muta in sè stesso anche il suo polare; quindi i due poliedri dànno origine allo stesso gruppo di rotazioni. Pertanto, poichè i poliedri polari del tetraedro, dell'ottaedro e dell'icosaedro regolari sono rispettivamente il tetraedro, l'esaedro e il dodecaedro regolari, possiamo concludere che i poliedri regolari dànno luogo ai seguenti gruppi di rotazioni (i cui ordini si deducono immediatamente dal numero degli spigoli del poliedro generatore):

a) Il gruppo *diedrico*, d'ordine $n = 2m$, se m è il numero dei lati del poligono costituente il diedro;

b) Il gruppo *tetraedrico*, d'ordine $n = 12$;

---

* *Centro sferico* d'un piano che taglia una sfera dicesi quella delle due estremità del diametro normale al piano che è più vicina ad esso. Se il piano passa pel centro della sfera, può considerarsi come suo centro sferico indifferentemente l'una o l'altra delle estremità del diametro ad esso normale.

c) Il gruppo *ottaedrico* od *esaedrico,* d'ordine $n = 24$;

d) Il gruppo *icosaedrico* o *dodecaedrico,* d'ordine $n = 60$.

Noi vogliamo studiare particolarmente questi gruppi.

52. A tal uopo, dato un poliedro regolare iscritto in una sfera, projettiamo dal centro sulla superficie sferica il poliedro. Otterremo una rete di poligoni sferici regolari ricoprente tutta la sfera. Per comodità daremo il nome di poliedro * anche a questa figura, e chiameremo facce di essa i poligoni sferici accennati, e spigoli e vertici i lati e i vertici di questi poligoni.

Dopo ciò esaminiamo quali sono le rotazioni che mutano in sè stesso un dato poliedro.

Se il polo d'una tale rotazione non cade sopra uno spigolo, esso deve trovarsi nel centro di una faccia, giacchè in caso diverso nessuna rotazione avente quel punto come polo muterebbe la faccia che lo contiene in sè stessa, mentre evidentemente non potrebbe mutarla in alcun'altra faccia. Se il polo, senza cadere in un vertice, sta sopra uno spigolo, è chiaro che dev'essere nel suo punto di mezzo. Si vede pertanto che tutte e sole le rota-

* Quando vi sia pericolo di equivoco, invece di *poliedro* diremo *poliedro sferico.*

zioni che mutano in sè stesso un poliedro sono le seguenti:

1. Rotazioni aventi per poli i punti di mezzo degli spigoli; la loro ampiezza è π;

2. Rotazioni aventi per poli i centri delle facce; le loro ampiezze sono $\frac{2\pi}{f}$ e i suoi multipli, f essendo il numero dei lati di ciascuna faccia;

3. Rotazioni aventi per poli i vertici; le loro ampiezze sono $\frac{2\pi}{q}$ e i suoi multipli, q essendo il numero degli spigoli uscenti da ciascun vertice.

I poli di ciascuna categoria sono tra loro equivalenti, giacchè esistono sempre rotazioni che mutano uno spigolo, una faccia od un vertice in un altro qualunque. Il numero dei poli è rispettivamente S, F, V, designando queste lettere il numero degli spigoli, delle facce e dei vertici del poliedro. D'altra parte, se ogni polo delle tre categorie è comune a ν_1, ν_2, ν_3 rotazioni, il numero dei poli stessi è rispettivamente (art. 36) $\frac{n}{\nu_1}$, $\frac{n}{\nu_2}$, $\frac{n}{\nu_3}$, sicchè:

$$(1) \qquad \frac{n}{\nu_1} = S, \quad \frac{n}{\nu_2} = F, \quad \frac{n}{\nu_3} = V,$$

e, tenuto conto che (art. 51):

$$(2) \qquad n = 2S,$$

si ha dalla (2) dell'art. 37:

(3) $$F + V = S + 2,$$

che è la nota *formola di* EULERO.

I numeri ν_1, ν_2, ν_3 si determinano facilmente.

Anzitutto dal confronto della prima delle (1) colla (2) segue $\nu_1 = 2$, come del resto si trova anche direttamente, osservando che il punto di mezzo di uno spigolo è polo, oltre che della rotazione nulla, di una rotazione di ampiezza π.

Per il diedro, poichè $F = 2$, $V = m$, si ha (posto $n = 2m$):

$$\nu_2 = m\,, \quad \nu_3 = 2\,.$$

Consideriamo ora simultaneamente il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro, i quali hanno la proprietà comune di avere le facce triangolari.

Il centro d'una faccia d'uno qualunque di questi poliedri è polo, oltre che della rotazione nulla, di due rotazioni, l'una di $\frac{2\pi}{3}$, l'altra di $\frac{4\pi}{3}$; quindi $\nu_2 = 3$.

Un vertice è polo, oltre che della rotazione nulla, di q—1 rotazioni di ampiezze $\frac{2\pi}{q}, \frac{4\pi}{q}, \ldots, \frac{2(q-1)\pi}{q}$, dove q ha lo stesso significato di poc'anzi; sicchè $\nu_3 = q$. Ora nei 3 casi $q = 3, 4, 5$; quindi $\nu_3 = 3, 4, 5$.

La (2) dell'art. 37 ci dà poi:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{6},$$

donde nei tre casi $n = 12, 24, 60$, come del resto si deduce immediatamente considerando che $n = 2S$.

Dalle formole precedenti risultano le seguenti relazioni tra F, S, V pei tre poliedri a facce triangolari:

$$F = 2V - 4, \quad S = 3V - 6.$$

Confrontando i risultati ottenuti colla tabella dell'art. 37, si vede che *i gruppi diedrico, tetraedrico, ottaedrico ed icosaedrico corrispondono rispettivamente ai casi II, III, IV, V della detta tabella.*

Dunque *i gruppi che abbiamo dimostrato essere i soli possibili esistono tutti realmente.*

53. In base a ciò che abbiamo trovato possiamo specificare meglio la costituzione dei 4 gruppi poliedrici, che designeremo sempre coi simboli II, III, IV, V della nota tabella, mentre col simbolo I indicheremo i gruppi ciclici.

II. Gli elementi del gruppo diedrico sono:

La rotazione identica.

Le $m - 1$ rotazioni di ampiezze:

$$\frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \ldots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$$

aventi per asse l'asse del diedro.

Le m rotazioni di ampiezza π aventi per assi

gli m assi di simmetria del poligono costituente il diedro.

Nel caso di $m = 2$, il gruppo *(Vierergruppe)* consta della rotazione identica e di 3 rotazioni di ampiezza π intorno a tre assi ortogonali *. Lo diremo per brevità un *gruppo trirettangolo.*

III. Gli elementi del gruppo tetraedrico sono:

La rotazione identica.

Le rotazioni di ampiezza π aventi per poli i punti di mezzo dei 6 spigoli; poichè tali punti sono due a due diametralmente opposti, le rotazioni sono 3.

Le 4 rotazioni di ampiezza $\frac{2\pi}{3}$ e le 4 d'ampiezza $\frac{4\pi}{3}$ aventi per poli ciascuna il centro d'una faccia e il vertice opposto.

IV. Gli elementi del gruppo ottaedrico sono:

La rotazione identica.

Le rotazioni d'ampiezza π aventi per poli i punti di mezzo dei 12 spigoli; poichè questi sono due a due diametralmente opposti, le rotazioni sono 6.

---

* A queste dovrebbero aggiungersi le infinite rotazioni di ampiezza qualunque intorno al diametro al quale si riduce il diedro; ma queste non si considerano come trasformanti il diedro in sè stesso, per la convenzione fatta nell'art. 51, secondo la quale anche il diedro bigonale si riguarda come giacente in un piano determinato.

Le rotazioni di ampiezze $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ aventi per poli i centri delle 8 facce; poichè questi sono due a due diametralmente opposti, le rotazioni sono 8.

Le rotazioni di ampiezze $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ aventi per poli i 6 vertici; poichè questi sono due a due diametralmente opposti, le rotazioni sono 9.

V. Gli elementi del gruppo icosaedrico sono:

La rotazione identica.

Le rotazioni di ampiezza π aventi per poli i punti di mezzo dei 30 spigoli; per la ragione già più volte ripetuta esse sono 15.

Le 20 rotazioni di ampiezze $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ aventi per poli i centri delle 20 facce.

Le 24 rotazioni di ampiezze $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$ aventi per poli i 12 vertici.

54. Vogliamo trattare ora due questioni importanti relative a questi gruppi, e cioè:

a) Se sieno semplici o composti (art. 15);

b) Se sieno ampliabili (art. 45).

I. Un gruppo ciclico, il cui ordine è un numero primo, è semplice (cfr. art. 9, Nota).

Abbiasi invece un gruppo ciclico

$$1, P, P^2, \ldots, P^{n-1},$$

il cui ordine n non sia un numero primo. Posto

$n = rs$, il sottogruppo:

$$1,\ P^r,\ P^{2r},\ \ldots,\ P^{(s-1)r}$$

è invariante, giacchè tutte le operazioni del gruppo sono tra loro permutabili. Quindi, se l'ordine di un gruppo ciclico non è primo, il gruppo è composto.

II. Il gruppo diedrico d'ordine $n = 2m$ contiene come sottogruppo invariante il gruppo ciclico delle m rotazioni (compresa la rotazione nulla) intorno all'asse del diedro. Infatti ogni altra rotazione del gruppo scambia fra loro i poli di questo sottogruppo e quindi trasforma il sottogruppo in sè stesso.

III. Il gruppo tetraedrico contiene come sottogruppo invariante il gruppo trirettangolo formato dalla rotazione nulla e dalle rotazioni di ampiezza π intorno alle tre mediane che, come è noto, sono tra loro ortogonali.

Infatti ogni altra rotazione del gruppo scambia fra loro le tre mediane, e quindi trasforma ciascuna delle 3 rotazioni di ampiezza π in una di queste rotazioni stesse.

VI. Il gruppo ottaedrico lascia invariato, come sappiamo, un cubo. Ora degli 8 vertici d'un cubo 4 non consecutivi costituiscono un tetraedro regolare, e gli altri quattro il tetraedro polare di questo. Una rotazione del gruppo evidentemente non può avere che uno di questi due effetti: o di la-

sciare invariati i due tetraedri o di scambiarli tra loro. Si può dimostrare che delle 24 rotazioni del gruppo 12 hanno il primo effetto e le altre 12 il secondo. Sieno P_1, P_2, ..., P_t le rotazioni di una delle due categorie, e Q scambi i due tetraedri; $P_1 Q$, $P_2 Q$, ..., $P_t Q$ saranno tutte diverse tra loro ed apparterranno all'altra categoria. Quindi il numero degli elementi di una qualsiasi delle due categorie non può essere minore del numero degli elementi dell'altra; in altri termini, le due categorie contengono un egual numero di elementi.

Le 12 rotazioni, che lasciano invariati i due tetraedri, costituiscono un sottogruppo tetraedrico Γ, il quale è invariante. Sia infatti P una sua rotazione, Q una rotazione qualunque non appartenente ad esso; evidentemente la rotazione $Q^{-1}PQ$ lascia invariati i tetraedri, quindi essa appartiene a Γ, sicchè può scriversi: $Q^{-1}\Gamma Q = \Gamma$.

Può osservarsi ancora, che il gruppo trirettangolo è sottogruppo invariante anche del gruppo ottaedrico. Infatti, come si è detto, ogni rotazione del gruppo ottaedrico o lascia invariati i due tetraedri o li scambia fra loro; ma, poichè i due tetraedri hanno le mediane comuni, l'effetto di qualunque rotazione del gruppo tetraedrico è di scambiare tra loro queste mediane. Di qui si viene come prima alla conclusione voluta.

V. Al contrario dei precedenti, il gruppo i-

cosaedrico non contiene alcun sottogruppo invariante, cioè è semplice.

Ecco come ciò si dimostra.

Il gruppo icosaedrico G contiene (v. art. prec.), oltre l'identità, 15 rotazioni d'ordine 2, 20 d'ordine 3, 24 d'ordine 5; i poli delle rotazioni di ciascuna di queste tre specie sono equivalenti (art. 52), sicchè le rotazioni d'una qualunque delle tre specie, o sono potenze di una rotazione della specie stessa, o sono ottenute da tali potenze trasformandole mediante opportune rotazioni del gruppo. Segue da ciò che, supposto esistere un sottogruppo invariante Γ del gruppo icosaedrico, se Γ contiene una rotazione d'una delle tre specie, contiene tutte le rotazioni della specie stessa. Pertanto l'ordine di Γ sarà rappresentato da un numero della forma:

$$m = 1 + 15\alpha + 20\beta + 24\gamma,$$

dove α, β, γ possono prendere i soli valori 0, 1; inoltre m deve essere divisore di 60. Lasciamo da parte le soluzioni $\alpha=\beta=\gamma=1$, $\alpha=\beta=\gamma=0$, a cui corrispondono rispettivamente $\Gamma=G$ e $\Gamma=1$.

Se $\gamma = 1$, ne segue $m \geqq 25$, e quindi necessariamente $m = 30$, donde la relazione impossibile:

$$15\alpha + 20\beta = 30 - 1 - 24 = 5.$$

Sia dunque $\gamma = 0$, e quindi:

$$m = 1 + 15\alpha + 20\beta.$$

Si vede che m non può essere multiplo di 5; ma il massimo divisore di 60 che non contiene 5 è $\frac{60}{5}$ cioè 12, quindi $m \leqq 12$, il che è impossibile quando α e β non sieno ambidue nulli.

Dunque il gruppo icosaedrico non contiene alcun sottogruppo invariante.

55. Veniamo all'altra questione, quella della ampliabilità dei gruppi considerati.

Prendiamo uno qualunque dei nostri poliedri sferici, ed uno qualunque dei suoi spigoli; il poliedro è evidentemente simmetrico rispetto al cerchio massimo γ_1 contenente questo spigolo. Ne segue (art. 41, 47) che, se R è la riflessione rispetto al cerchio γ_1 e P una rotazione qualunque del gruppo G corrispondente al poliedro, secondochè i poli di P sono punti di mezzo di spigoli, centri di facce o vertici, tali saranno pure i poli di $P' = RPR$; di più le due rotazioni P, P' avranno la stessa ampiezza e senso contrario (essendo θ, $\overline{\theta}$ coniugati).

Da ciò risulta che P' è una delle rotazioni del gruppo G.

Dunque il gruppo G è permutabile colla riflessione R.

Oltre ai cerchi contenenti gli spigoli, il poliedro può avere altri cerchi di simmetria; tali sono quelli che contengono le bisettrici degli angoli delle

varie facce *. Anche per questi cerchi può ripetersi ciò che testè si è detto. Dunque:

Un gruppo poliedrico è permutabile con tutte le riflessioni aventi per cerchi di simmetria i cerchi di simmetria del relativo poliedro.

E per conseguenza (art. 45):

Un gruppo poliedrico può ampliarsi mediante una riflessione rispetto ad uno qualunque dei cerchi di simmetria del relativo poliedro.

Risulterà evidente da ciò che diremo più innanzi, che, qualunque sia la riflessione scelta, il gruppo ampliato è sempre lo stesso.

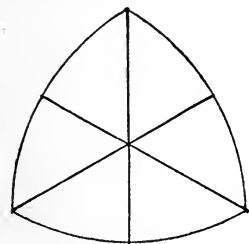
56. Abbiasi un poliedro sferico, e si imaginino tracciati tutti i suoi cerchi di simmetria. Questi cerchi, contenendo le mediane delle varie facce, dividono ciascuna faccia in $2f$ triangoli, alternativamente eguali e simmetrici **, f essendo il numero dei lati d'ogni faccia. Si ha così sulla sfera una rete di triangoli, dei quali 4 si appoggiano su ogni spigolo. E poichè il numero degli spigoli è (art. 51) $\frac{n}{2}$, quello dei triangoli è $2n$. Cioè:

I cerchi di simmetria d'un poliedro dividono la

* Questi cerchi sono distinti dai precedenti nel diedro e nell'ottaedro; coincidono con essi nel tetraedro e nell'icosaedro.

** Nel caso del diedro e in quello del tetraedro i triangoli, essendo isosceli, sono insieme eguali e simmetrici.

sfera in $2n$ *triangoli alternativamente eguali e simmetrici,* n *essendo l'ordine del corrispondente gruppo poliedrico.*

Gli angoli di ciascun triangolo hanno le ampiezze $\frac{\pi}{\nu_1}, \frac{\pi}{\nu_2}, \frac{\pi}{\nu_3}$. Infatti i tre vertici d'ogni triangolo sono il punto di mezzo d'uno spigolo, il centro d'una faccia e un vertice. Ora nel primo di questi vertici si ha evidentemente un angolo retto; ma $\nu_1 = 2$ in tutti i casi, quindi l'ampiezza dell'angolo è $\frac{\pi}{\nu_1}$. Nel secondo vertice l'angolo è $\frac{2\pi}{2f}$ ossia $\frac{\pi}{f}$; ora per il diedro $f = m = \nu_2$,

(Fig. 3).

e per gli altri poliedri $f = 3 = \nu_2$, quindi l'ampiezza dell'angolo è $\frac{\pi}{\nu_2}$. Nel terzo vertice l'angolo è $\frac{2\pi}{2q}$, ossia $\frac{\pi}{q}$, dove q è, come prima (art. 52), il numero degli spigoli concorrenti in ciascun vertice; ora per il diedro $q = 2 = \nu_3$, per gli altri poliedri si ha pure $q = \nu_3$, quindi l'ampiezza dell'angolo è $\frac{\pi}{\nu_3}$ *.

* Una verifica del risultato ottenuto si ha dalla nota

57. Ogni rotazione della sfera che porta a coincidenza con sè stesso il poliedro fa coincidere uno dei $2n$ triangoli della rete con un altro triangolo ad esso eguale. E poichè non v'ha alcuna rotazione (tranne la rotazione nulla) che faccia coincidere un triangolo con sè stesso, dati due triangoli eguali, non vi può essere che una sola rotazione del gruppo che porti uno di essi a coincidere coll'altro. Ora, se per una coppia di triangoli una tale rotazione non esistesse, il numero delle rotazioni del gruppo dovrebbe essere inferiore a quello dei triangoli eguali, mentre questi due numeri sono identici. Dunque:

Dati due triangoli eguali della rete, esiste una ed una sola rotazione del gruppo che porta il primo di essi a coincidere col secondo.

Imaginiamo, per maggior chiarezza, di tratteggiare tutti i triangoli di uno dei due sistemi di n triangoli eguali, lasciando bianchi quelli dell'altro sistema. Se scegliamo ad arbitrio uno dei triangoli

---

formola per l'area di un triangolo sferico. L'area di uno dei triangoli della rete è $\frac{4\pi}{2n}$ ossia $\frac{2\pi}{n}$, e il suo eccesso sferico è $\frac{\pi}{\nu_1}+\frac{\pi}{\nu_2}+\frac{\pi}{\nu_3}-\pi=\pi\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\nu_i}-1\right)$; eguagliando queste due quantità si ottiene la formola (2) dell'art. 37.

bianchi, e lo consideriamo come corrispondente alla rotazione nulla, potremo stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli n triangoli bianchi e le n rotazioni del gruppo, assegnando come corrispondente a ciascun triangolo la rotazione che porta a coincidere con esso il triangolo primitivamente scelto.

Qual'è l'ufficio dei triangoli tratteggiati in questa rappresentazione del gruppo di rotazioni?

Una riflessione rispetto ad uno qualunque dei cerchi di cui si compone la rete fa coincidere la figura con sè stessa, ma trasforma ogni triangolo bianco in uno tratteggiato, e viceversa. Lo stesso effetto ha, per conseguenza, il prodotto di una rotazione per una riflessione, ed è facile vedere che, fissato ad arbitrio un triangolo bianco ed uno tratteggiato, esiste una ed una sola rotazione, il cui prodotto per una determinata riflessione porti a coincidenza il primo triangolo col secondo. Se quindi si sceglie arbitrariamente un triangolo bianco, e lo si considera come corrispondente all'operazione identica, si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra i $2n$ triangoli della rete e le $2n$ operazioni del gruppo ampliato, assegnando come corrispondente a ciascun triangolo l'operazione che porta a coincidere con esso il triangolo primitivamente scelto.

Di qui risulta evidente che, qualunque sia la

riflessione che si sceglie per effettuare l'ampliamento, il gruppo ampliato è sempre lo stesso.

Un'osservazione importante riguardo alle reti ora considerate è la seguente: *Dato un triangolo della rete, si può costruire l'intera rete per simmetria,* cioè costruendo prima i triangoli simmetrici al dato rispetto ai suoi tre lati, poi i triangoli simmetrici a questi rispetto ai loro lati, e così di seguito.

58. Per quanto sia semplice la rappresentazione dei gruppi sulla sfera alla quale siamo giunti, è però desiderabile, per ovvie ragioni pratiche, passare da essa ad una rappresentazione sul piano. Tale passaggio si effettua molto semplicemente mediante una proiezione stereografica; per una proprietà già più volte invocata di tale proiezione le figure piane ottenute constano solo di cerchi e rette, e sono quindi di costruzione assai facile. Rimettiamo a più innanzi lo studio particolareggiato di tali figure; e per ora ci limitiamo ad osservare che *anche queste si possono dedurre da un unico triangolo mediante simmetria,* intesa questa parola nel senso dell'art. 41.

Costruzione dei gruppi finiti di sostituzioni e dei relativi gruppi ampliati.

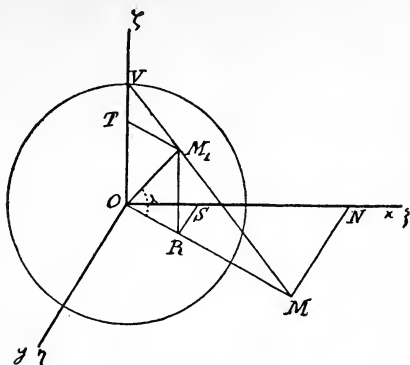
59. Abbiamo veduto (art. 49) come, mediante un'opportuna proiezione stereografica, da una sostituzione lineare ellittica si ottenga una rotazione d'una sfera su sè stessa. Reciprocamente, dato un gruppo finito di rotazioni d'una sfera su sè stessa, si ottiene da esso, mediante una proiezione stereografica sul piano della variabile complessa, un gruppo finito di sostituzioni; e noi abbiamo già trovato (art. 50 e seg.) che i gruppi poliedrici sono atti a fornirci per questa via tutti i possibili gruppi finiti di sostituzioni lineari.

Noi ci proponiamo ora di costruire effettivamente questi gruppi.

A tal uopo noi dobbiamo risolvere il seguente problema: Data una rotazione della sfera sopra sè stessa, trovare la corrispondente sostituzione lineare.

60. Stabiliamo dapprima le relazioni esistenti tra le coordinate d'un punto del piano e quelle della proiezione stereografica di esso sulla sfera.

Prendasi per centro della sfera l'origine O delle coordinate del piano, e, indicando con ξ, η, ζ le coordinate dei punti della sfera, si facciano coincidere gli assi ξ, η cogli assi x, y del piano. Sia M un punto del piano, M_1 la sua proiezione ste-

reografica sulla sfera, preso come centro di proiezione il punto d'intersezione V della sfera coll'as-

(Fig. 4).

se ζ positivo. Sia R la proiezione ortogonale di M_1 sul piano $\xi\eta$, T quella di M_1 sull'asse ζ, e sieno N, S quelle di M, R sull'asse ξ. È quasi inutile osservare che i punti O, R, M sono allineati. Designando con x, y le coordinate del punto M del piano, con ξ, η, ζ quelle del punto corrispondente M_1 della sfera, si ha:

$$x = ON, \quad y = NM, \quad \xi = OS, \quad \eta = SR, \quad \zeta = RM_1;$$

inoltre, supposto il raggio della sfera $= 1$:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{1}$$

Dalla figura risulta:

$$\frac{OR}{OM} = \frac{OS}{ON} = \frac{SR}{NM}, \quad \frac{TM_1}{OM} = \frac{TV}{OV},$$

$$TM_1 = OR, \quad OV = 1, \quad TV = 1 - OT = 1 - RM_1,$$

quindi:

$$\frac{OS}{ON} = \frac{SR}{NM} = \frac{1 - RM_1}{1},$$

ossia:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{1 - \zeta}{1},$$

da cui:

$$(2) \qquad x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}.$$

Ne segue, tenuto conto della (1):

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{1 - \zeta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta},$$

e da questa e dalle precedenti:

$$(3) \; \xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Le (2), (3) ci dànno le relazioni cercate.

61. Riprendiamo la figura dell'art. 49, e assumiamo C come origine delle coordinate. Supponiamo inoltre per semplicità il raggio della sfera $= 1$. Posto:

$$p = \rho e^{i\mu}, \quad q = \rho' e^{i\mu'},$$

si avrà, tenuto conto che l'angolo PVQ è retto e che P e Q sono allineati con C e da parti opposte di esso:

$$\rho\rho' = 1, \quad \mu' = \mu + \pi,$$

sicchè potrà scriversi:

$$q = -\frac{1}{\rho} e^{i\mu}.$$

Dalla:

$$\frac{z'-p}{z'-q} = \theta \frac{z-p}{z-q} = e^{-i\alpha} \frac{z-p}{z-q},$$

dove α è l'ampiezza della rotazione (art. 49), segue:

$$z' = \frac{(\theta q - p) z + p q (1-\theta)}{(\theta - 1) z + (q - \theta p)},$$

ossia, posto $\alpha = 2\beta$, $e^{-i\beta} = \gamma$, ed osservando che $\frac{p}{q} = -\rho^2$:

$$(1) \quad z' = \frac{\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\rho^2\right) z + p\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)}{\frac{1}{q}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) z + \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma \rho^2\right)}.$$

Ora γ e $\frac{1}{\gamma}$ sono coniugati, e così p e $-\frac{1}{q}$, quindi lo sono pure $\gamma + \frac{1}{\gamma}\rho^2$ e $\frac{1}{\gamma} + \gamma\rho^2$, $p\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)$ e $-\frac{1}{q}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)$. Indicando pertanto con A, B, C, D quattro quantità reali, potrà porsi:

$$\gamma + \frac{1}{\gamma}\rho^2 = D + iC, \quad \frac{1}{\gamma} + \gamma\rho^2 = D - iC,$$

$$\frac{1}{q}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) = B + iA, \quad -p\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right) = B - iA.$$

La (1) diverrà allora:

$$z' = \frac{(D + iC)z - (B - iA)}{(B + iA)z + (D - iC)}.$$

Il determinante di questa sostituzione è:

$$\Delta = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = (\rho^2 + 1)^2;$$

per ridurla unitaria basta dividerne tutti i coefficienti per $\rho^2 + 1$. Posto pertanto:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2 + 1}\left(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\rho^2\right) = d + ic, \\ \dfrac{1}{\rho^2 + 1}\left(\dfrac{1}{\gamma} + \gamma\rho^2\right) = d - ic, \\ \dfrac{1}{(\rho^2 + 1)q}\left(\gamma - \dfrac{1}{\gamma}\right) = b + ia, \\ -\dfrac{p}{\rho^2 + 1}\left(\dfrac{1}{\gamma} - \gamma\right) = b - ia, \end{cases}$$

la sostituzione diviene:

$$(3)\qquad z' = \frac{(d + ic)z - (b - ia)}{(b + ia)z + (d - ic)},$$

e il suo determinante è $= 1$; le quantità reali a, b, c, d sono legate dalla relazione:

$$(4)\qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Prendiamo gli assi coordinati ξ, η, ζ come nell'articolo precedente, ed individuiamo ciascun punto della sfera mediante la sua longitudine e la sua latitudine, considerando il piano $\xi\eta$ come equatore e il piano $\xi\zeta$ come meridiano d'origine, e prendendo come verso positivo della latitudine e della longitudine quello che conduce dal semiasse

positivo ξ a quello ζ o η mediante una rotazione di $\frac{\pi}{2}$.

Tra la distanza di un punto M del piano dall'origine e la latitudine della sua proiezione M_1 passa una relazione semplice. Posto (vedi la figura dell'articolo precedente):

$$OM = \rho, \quad MOM_1 = \lambda,$$

si ha $M_1 OV = \frac{\pi}{2} - \lambda$, quindi, essendo $M_1 OV$ un triangolo isoscele, $OVM_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}$, e infine, ricordando che $OV = 1$:

$$\rho = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}}.$$

Ne segue:

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2} = \frac{\rho - 1}{\rho + 1},$$

e quindi:

$$(5) \qquad \operatorname{sen}\lambda = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}, \quad \cos\lambda = \frac{2\rho}{\rho^2 + 1}.$$

Dando pertanto a ρ il significato che aveva al principio di questo articolo, le (5) determinano la latitudine del punto M_1. La sua longitudine è μ.

Dopo ciò le formole (2) ci permettono di risolvere il problema propostoci nell'art. 59.

Una rotazione è data, quando si conosce la sua ampiezza $\alpha = 2\beta$ e la latitudine λ e la longitudine μ di uno dei suoi poli. Ora dalle (2) segue, tenuto conto delle (5):

$$d = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) = \cos\beta,$$

$$c = \frac{1}{2i(\rho^2 + 1)}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)(1 - \rho^2)$$
$$= \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}\,\frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i} = \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\beta,$$

$$b = \frac{1}{2(\rho^2 + 1)}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{q} + p\right)$$
$$= -\frac{1}{2(\rho^2 + 1)}(e^{i\beta} - e^{-i\beta})\,\rho\,(-e^{-i\mu} + e^{i\mu})$$
$$= \frac{2\rho}{\rho^2 + 1}\,\frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i}\,\frac{e^{i\mu} - e^{-i\mu}}{2i} = \cos\lambda \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\mu,$$

$$a = \frac{1}{2i(\rho^2 + 1)}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{q} - p\right)$$
$$= \frac{1}{2i(\rho^2 + 1)}(e^{i\beta} - e^{-i\beta})\,\rho\,(e^{-i\mu} + e^{i\mu})$$
$$= \frac{2\rho}{\rho^2 + 1}\,\frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i}\,\frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu}}{2} = \cos\lambda \operatorname{sen}\beta \cos\mu.$$

Le formole:

$$(6)\qquad \begin{cases} a = \cos\lambda \operatorname{sen}\beta \cos\mu \\ b = \cos\lambda \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\mu \\ c = \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\beta \\ d = \cos\beta \end{cases}$$

dànno la sostituzione (3) corrispondente ad una data rotazione.

62. Applichiamo i risultati trovati ai gruppi finiti di rotazioni.

Gruppi ciclici. — Abbiasi un gruppo ciclico d'ordine n, i cui poli sieno i punti $(0, 0, \pm 1)$.

Sarà $\lambda = \frac{\pi}{2}$, μ indeterminato, inoltre:

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{2k\pi}{n} = \frac{k\pi}{n},$$

dove $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, quindi:

$$a = b = 0, \quad c = \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n}, \quad d = \cos \frac{k\pi}{n},$$

e per conseguenza:

$$z' = \frac{\left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n}\right) z}{\cos \frac{k\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n}},$$

o più semplicemente:

$$z' = e^{\frac{2k\pi i}{n}} z \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Gruppi diedrici. — Imaginiamo il poligono che costituisce il diedro giacente nel piano $\xi\eta$ ed uno dei suoi vertici posto nel punto $(1, 0, 0)$.

Il gruppo consta allora di un sottogruppo ciclico d'ordine m avente per poli i punti $(0, 0, \pm 1)$, e di m rotazioni d'ampiezza π intorno agli m assi di simmetria del poligono, che sono m rette egual-

mente inclinate fra loro, una delle quali è l'asse ξ. Le sostituzioni corrispondenti alle prime m rotazioni sono (vedi sopra):

$$z' = e^{\frac{2k\pi i}{m}} z \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Per le altre m rotazioni si ha:

$$\lambda = 0, \ \beta = \frac{\pi}{2}, \ \mu = \frac{k\pi}{m} \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1),$$

quindi:

$$a = \cos\frac{k\pi}{m}, \quad b = \operatorname{sen}\frac{k\pi}{m}, \quad c = d = 0,$$

e per conseguenza:

$$z' = -\frac{\operatorname{sen}\frac{k\pi}{m} - i\cos\frac{k\pi}{m}}{\left(\operatorname{sen}\frac{k\pi}{m} + i\cos\frac{k\pi}{m}\right)z},$$

o più semplicemente:

$$z' = \frac{e^{\frac{2k\pi i}{m}}}{z} \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Le sostituzioni di un gruppo diedrico sono dunque date dalle formole:

$$(1) \quad z' = e^{\frac{2k\pi i}{m}} z, \quad z' = \frac{e^{\frac{2k\pi i}{m}}}{z} \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

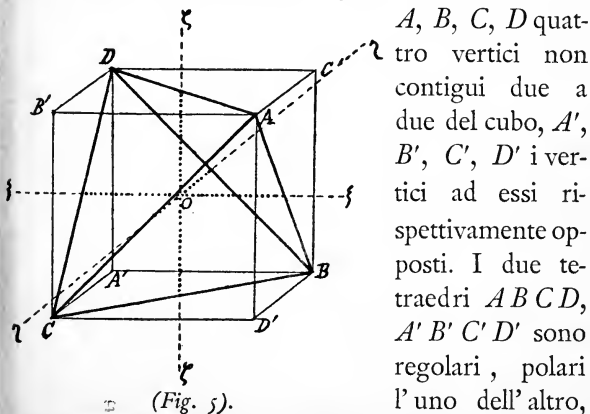
In particolare le sostituzioni del gruppo trirettangolo (art. 53) sono:

$$(2) \ z' = z, \quad z' = -z, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = -\frac{1}{z}.$$

Se T rappresenta la sostituzione $z' = e^{\frac{2\pi i}{m}} z$ corrispondente alla rotazione di ampiezza $\frac{2\pi}{m}$ intorno all'asse ζ, e U la sostituzione $z' = \frac{1}{z}$ corrispondente alla rotazione di ampiezza π intorno all'asse ξ, tutte le sostituzioni del gruppo diedrico saranno rappresentate da:

$$T^k, \quad T^k U \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

63. **Gruppo tetraedrico.** — Noi vogliamo disporre il tetraedro in modo che le sue tre mediane coincidano coi tre assi coordinati.

A tal uopo imaginiamo iscritto nella sfera un cubo colle facce parallele ai piani coordinati; sieno A, B, C, D quattro vertici non contigui due a due del cubo, A', B', C', D' i vertici ad essi rispettivamente opposti. I due tetraedri $ABCD$, $A'B'C'D'$ sono regolari, polari l'uno dell'altro, ed hanno per mediane comuni i tre assi coordinati.

(Fig. 5).

Il gruppo tetraedrico contiene, come abbiamo trovato (art. 54), un sottogruppo trirettangolo, che rappresenteremo con:

(1) $1, \quad T, \quad U, \quad TU,$

T, U denotando rispettivamente due rotazioni *) di ampiezza π intorno agli assi ζ e ξ, e TU per conseguenza una rotazione di ampiezza π intorno all'asse η. Il risultato di queste rotazioni sui vertici del tetraedro può rappresentarsi così:

$$(2) \quad \begin{cases} T = \begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ D\,C\,B\,A \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ B\,A\,D\,C \end{pmatrix}, \\ TU = \begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ C\,D\,A\,B \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Sia S una rotazione di ampiezza $\frac{2\pi}{3}$ avente per poli A, A':

$$S = \begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ A\,C\,D\,B \end{pmatrix};$$

il suo quadrato è una rotazione di ampiezza $\frac{4\pi}{3}$ cogli stessi poli:

$$S^2 = \begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ A\,D\,B\,C \end{pmatrix}.$$

Data una rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ o di $\frac{4\pi}{3}$ intorno ad

---

*) Per semplicità indicheremo sempre colla stessa lettera una rotazione e la sostituzione corrispondente.

un altro vertice, si dimostra facilmente che questa è il prodotto di S o di S^2 per una delle tre rotazioni (2). Sia la rotazione considerata:

$$X = \begin{pmatrix} A\, E_1\, E_2\, E_3 \\ E_2\, E_1\, E_3\, A \end{pmatrix},$$

dove E_1, E_2, E_3 denotano i vertici B, C, D presi in un ordine qualunque. Posto:

$$Y = \begin{pmatrix} A\, E_1\, E_2\, E_3 \\ E_2\, E_3\, A\, E_1 \end{pmatrix},$$

si ha:

$$X\,Y = \begin{pmatrix} A\, E_1\, E_2\, E_3 \\ A\, E_3\, E_1\, E_2 \end{pmatrix},$$

ossia, poichè Y è di ordine 2:

$$X = \begin{pmatrix} A\, E_1\, E_2\, E_3 \\ A\, E_3\, E_1\, E_2 \end{pmatrix} Y;$$

ma Y è una delle (2), e $\begin{pmatrix} A\, E_1\, E_2\, E_3 \\ A\, E_3\, E_1\, E_2 \end{pmatrix}$ è S oppure S^2, quindi resta dimostrato l'asserto.

Pertanto le rotazioni del gruppo tetraedrico sono le seguenti:

$$(3) \qquad \begin{cases} 1 & T & U & TU \\ S & ST & SU & STU \\ S^2 & S^2T & S^2U & S^2TU. \end{cases}$$

Resta da trovarsi l'espressione analitica delle sostituzioni corrispondenti.

Le sostituzioni (1) sono state già costruite nell'articolo precedente [v. formole (2)].

Determiniamo la sostituzione S.

Le coordinate del punto A sono tutte e tre $=\frac{1}{\sqrt{3}}$; quindi le note formole:

$$\tang \lambda = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad \tang \mu = \frac{\eta}{\xi}$$

ci dànno:

$$\tang \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tang \mu = 1,$$

e per conseguenza:

$$\operatorname{sen} \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{sen} \mu = \cos \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Inoltre $\beta = \frac{\pi}{3}$, quindi:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \beta = \frac{1}{2}.$$

Dopo ciò le (6) dell'art. 61 ci dànno:

$$a = b = c = d = \tfrac{1}{2},$$

sicchè l'espressione della sostituzione S è:

$$z' = \frac{\frac{1+i}{2} z - \frac{1-i}{2}}{\frac{1+i}{2} z + \frac{1-i}{2}},$$

ossia, considerando che $1-i = -i(1+i)$:

$$z' = \frac{z+i}{z-i}.$$

Di qui e dalle (2) dell'art. prec. si ottengono, mediante le formole di moltiplicazione dell'art. 20, le espressioni di tutte le sostituzioni del gruppo. Le facciamo qui seguire, ripetendo anche quelle già trovate:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad TU = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \qquad ST = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix},$$

$$SU = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \qquad STU = \begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S^2 T = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^2 U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}, \qquad S^2 TU = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}.$$

Le sostituzioni del gruppo possono anche scriversi brevemente così:

$$(4)\quad z' = \delta z, \quad z' = \frac{\delta}{z}, \quad z' = \delta \frac{z + \varepsilon i}{z - \varepsilon i}, \quad z' = \delta i \frac{z + \varepsilon}{z - \varepsilon},$$

dove δ, ε possono prendere i valori $+1$ e -1.

Interessa, per ciò che si dovrà dire più innanzi, di avere l'espressione delle sostituzioni del gruppo tetraedrico anche quando il tetraedro si imagini disposto in altro modo, e precisamente ruotato di 45° intorno all'asse ζ rispetto alla posizione precedente. Allora, indicando con x, y e

con x', y' le coordinate delle nuove posizioni di un punto primitivo e del suo trasformato, si ha:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y),$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y');$$

posto:

$$x + iy = z, \quad x' + iy' = z',$$

segue di qui:

$$(5) \qquad \zeta = \frac{1+i}{\sqrt{2}} z, \quad \zeta' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} z'.$$

Posto, per brevità:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \rho, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \rho',$$

la sostituzione:

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$$

diviene:

$$\rho z' = \frac{\alpha\rho z + \beta}{\gamma\rho z + \delta},$$

ossia:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta\rho'}{\gamma\rho z + \delta},$$

sicchè la sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ diviene, nella nuova disposizione del poliedro, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta\rho' \\ \gamma\rho & \delta \end{pmatrix}$. Si ha quindi,

tenuto conto che $\rho^2 = -\rho'^2 = i$, $\rho\rho' = 1$, $\rho = i\rho'$:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad TU = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \rho' & 1 \\ 1 & -\rho \end{pmatrix}, \qquad ST = \begin{pmatrix} \rho' & 1 \\ -1 & \rho \end{pmatrix},$$

$$SU = \begin{pmatrix} \rho' & -1 \\ 1 & \rho \end{pmatrix}, \qquad STU = \begin{pmatrix} -\rho' & 1 \\ 1 & \rho \end{pmatrix},$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 1 & -\rho' \end{pmatrix}, \qquad S^2 T = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ -1 & \rho' \end{pmatrix},$$

$$S^2 U = \begin{pmatrix} -\rho & 1 \\ 1 & \rho' \end{pmatrix}, \qquad S^2 TU = \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ 1 & \rho' \end{pmatrix}.$$

Le sostituzioni possono anche scriversi brevemente, δ, ε avendo lo stesso significato di prima:

$$z' = \delta z, \quad z' = \frac{\delta i}{z},$$

$$z' = \delta \frac{\rho' z + \varepsilon}{z - \varepsilon\rho}, \quad z' = \delta \frac{\varepsilon\rho z + 1}{z - \varepsilon\rho'}.$$

64. **Gruppo ottaedrico.** — Se supponiamo l'ottaedro disposto colle sue diagonali secondo gli assi coordinati, esso è il poliedro polare del cubo considerato nell'articolo precedente, e perciò le rotazioni che lo lasciano invariato sono quelle che lasciano invariato il tetraedro $ABCD$ e quelle che lo scambiano col suo polare $A'B'C'D'$ (cfr. art. 54). Le prime sono le rotazioni (3) dell'articolo

precedente; le seconde si ottengono moltiplicando queste per una delle rotazioni che scambiano i due tetraedri, per es. per la rotazione di ampiezza $\frac{\pi}{2}$ intorno all'asse ζ, che denoteremo con V. Le rotazioni del gruppo ottaedrico sono dunque le seguenti:

$$\begin{array}{llll} 1 & T & U & TU \\ S & ST & SU & STU \\ S^2 & S^2T & S^2U & S^2TU \\ V & TV & UV & TUV \\ SV & STV & SUV & STUV \\ S^2V & S^2TV & S^2UV & S^2TUV. \end{array}$$

Osservando che:

$$T = V^2, \qquad TU = UT,$$

queste rotazioni possono anche scriversi come segue:

$$\begin{array}{llllll} 1 & S & S^2 & U & SU & S^2U \\ V & SV & S^2V & UV & SUV & S^2UV \\ V^2 & SV^2 & S^2V^2 & UV^2 & SUV^2 & S^2UV^2 \\ V^3 & SV^3 & S^2V^3 & UV^3 & SUV^3 & S^2UV^3. \end{array}$$

Le sostituzioni del gruppo si trovano aggiungendo a quelle dell'art. prec. i loro prodotti per la sostituzione V, la cui espressione analitica è:

$$z' = iz;$$

si ottiene così:

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix},\quad S^2=\begin{pmatrix}i & i\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad SU=\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix},\quad S^2U=\begin{pmatrix}1 & -1\\ i & i\end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad SV=\begin{pmatrix}i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix},\quad S^2V=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$UV=\begin{pmatrix}0 & i\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad SUV=\begin{pmatrix}i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix},\quad S^2UV=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$V^2=T=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$SV^2=ST=\begin{pmatrix}1 & i\\ -1 & i\end{pmatrix},$$

$$S^2V^2=S^2T=\begin{pmatrix}i & i\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$UV^2=TU=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$SUV^2=STU=\begin{pmatrix}-1 & i\\ 1 & i\end{pmatrix},$$

$$S^2UV^2=S^2TU=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ i & i\end{pmatrix},$$

$$V^3=TV=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$SV^3=STV=\begin{pmatrix}i & -1\\ -1 & i\end{pmatrix},$$

$$S^2V^3=S^2TV=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$UV^3=TUV=\begin{pmatrix}0 & i\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$SUV^3 = STUV = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

$$S^2UV^3 = S^2TUV = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} *.$$

Più brevemente le sostituzioni del gruppo possono essere rappresentate dalle (4) dell'art. prec., dove ε può prendere i valori ± 1, δ i valori ± 1, $\pm i$.

Ancora più brevemente esse possono rappresentarsi mediante le:

$$z' = \delta z, \quad z' = \frac{\delta}{z}, \quad z' = \delta \frac{z + \varepsilon}{z - \varepsilon},$$

dove le δ, ε possono prendere i valori ± 1, $\pm i$; queste formole possono anche scriversi:

$$z' = i^h z, \quad z' = \frac{i^h}{z}, \quad z' = i^h \frac{z + i^k}{z - i^k} \qquad (h, k = 0, 1, 2, 3).$$

65. **Gruppo icosaedrico.** — Per maggior chia-

---

* Tra le U, V esistono alcune semplici relazioni. Osservando che U, UV sono di ordine 2, e che V è di ordine 4, si ha:

$$U^2 = 1, \quad UVUV = 1, \quad V^4 = 1,$$

donde:

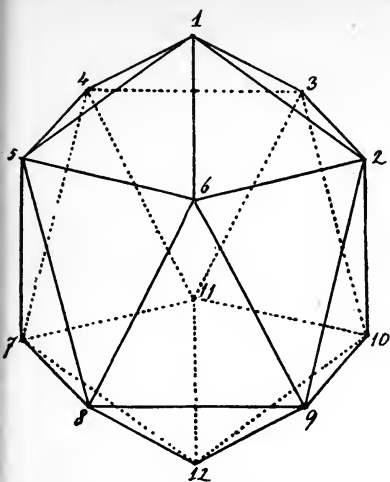
$$UVU = V^3,$$

e quindi:

$$VU = UV^3.$$

Di qui segue poi:

$$V^2U = VUV^3 = UV^6 = UV^2,$$
$$V^3U = VUV^2 = UV^5 = UV.$$

rezza, teniamoci dinanzi una imagine prospettica dell'icosaedro, dove i vertici sono denotati coi numeri dall'1 al 12. Diciamo l il lato, h l'altezza d'una faccia dell'icosaedro sferico. Una delle altezze divide la faccia in due triangoli rettangoli eguali i cui cateti sono h, $\frac{l}{2}$ e la cui

(*Fig. 6*).

ipotenusa è l, sicchè si ha per una nota formola di trigonometria sferica:

$$\cos l = \cos \frac{l}{2} \cos h.$$

D'altra parte, considerando per es. il semicerchio massimo 1. 2. 12, si vede che esso si compone di un lato e di due altezze, sicchè:

$$l + 2h = \pi,$$

ossia:

$$h = \frac{\pi}{2} - \frac{l}{2}.$$

La formola precedente diviene quindi:

$$\cos l = \cos \frac{l}{2} \operatorname{sen} \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} l,$$

ossia:

$$\operatorname{tang} l = 2,$$

da cui:

$$\operatorname{sen} l = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos l = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Per ciò che diremo in seguito ci interessa anche di conoscere le funzioni trigonometriche di $\frac{l}{2}$. Posto:

$$\sqrt{5} = r,$$

si ha:

$$\operatorname{sen} \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{r-1}{2r}}, \quad \cos \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{r+1}{2r}}.$$

Intanto l'espressione ottenuta di $\operatorname{tang} l$ ci permette di costruire con tutta facilità la rappresentazione dell'icosaedro col metodo di Monge. Disponiamo l'icosaedro in modo che la diagonale 1. 12 coincida coll'asse ζ, e il piano 1. 2. 12 col piano $\xi\zeta$. Distinguiamo con un apice le icnografie, con due le ortografie. Se dal punto $1''$ si conduce la tangente al contorno apparente della sfera, e su questa si prende un segmento $1''A$ di lunghezza doppia del raggio, la retta che congiunge A colla proiezione O'' del centro taglierà il contorno apparente nel punto $2''$. Trovata l'altra proiezione

2′ del punto 2, si iscriverà nel cerchio di centro O' passante per 2′, a partire da quest'ultimo punto,

(Fig. 7).

un pentagono regolare; i vertici di questo saranno 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, e i punti 3″ e 6″ tra loro coincidenti, 4″ e 5″ pure tra loro coincidenti si troveranno immediatamente, considerando che essi

stanno sulla parallela alla linea di terra condotta per 2''. I punti 7', 8', 9', 10', 11' sono i punti opposti rispettivamente a 2', 3', 4', 5', 6' sul cerchio contenente questi punti; le corrispondenti ortografie stanno sopra una parallela alla linea di terra simmetrica a quella precedentemente condotta rispetto ad O''. Come verifica può osservarsi che, essendo il punto 2 nel piano $\xi\zeta$, i vertici adiacenti 1, 3, 10, 9, 6 giacciono in un piano perpendicolare a questo, e quindi le loro ortografie stanno sopra una retta; lo stesso può dirsi delle ortografie dei punti 4, 5, 8, 12, 11.

66. È qui il luogo di fare un'osservazione che ci sarà utile tra poco. Abbiansi due rotazioni P_1, P_2 di ampiezze α_1, α_2 e di assi l_1, l_2. Si ha identicamente:

$$P_1 P_2 = P_2 (P_2^{-1} P_1 P_2),$$

e $P_2^{-1} P_1 P_2$ è (art. 31) una rotazione di ampiezza α_1 intorno all'asse l'_1 in cui si trasforma l_1 per effetto della rotazione P_2. Quindi per ottenere la rotazione $P_1 P_2$ o si può effettuare prima la P_1, poi la P_2, oppure si può effettuare prima la P_2, poi una rotazione della stessa ampiezza di P_1 intorno all'asse in cui si trasforma l'asse di P_1 per effetto della P_2.

Ciò premesso, possiamo dimostrare che tutte le rotazioni del gruppo icosaedrico si possono comporre mediante 3 sole rotazioni, e cioè:

1. Una rotazione S di ampiezza $\frac{2\pi}{5}$ intorno alla diagonale 1.12;

2. Una rotazione T di ampiezza π intorno alla congiungente i punti di mezzo degli spigoli 1.2, 7.12;

3. Una rotazione U di ampiezza π intorno alla congiungente i punti di mezzo degli spigoli 6.8, 3.11.

Vogliasi effettuare la rotazione che porta lo spigolo 1.2 a coincidere con un altro spigolo qualunque $\mu.\nu$. Distingueremo 3 casi.

a) μ è il vertice 1. Allora la rotazione considerata è S od una sua potenza.

b) μ è uno dei vertici 2, 3, 4, 5, 6. Per portare anzitutto il vertice 1 nel vertice μ, si eseguirà prima la rotazione T che porta 1 in 2, poi, se μ è diverso da 2, la rotazione $S^{\mu-2}$ che porta 1 al posto μ *. Dopo ciò, se 2 non risulta già coincidente con ν, si potrà portare a coincidere con esso

* Non bisogna dimenticare che gli assi di rotazione devono considerarsi come fissi nello spazio. Per comprendere più chiaramente le cose che stiamo dicendo, conviene imaginare un icosaedro fisso ed uno mobile, coincidenti in origine, e quando si dice che una rotazione porta lo spigolo $\alpha\beta$ sullo spigolo $\gamma\delta$, si deve intendere che essa, applicata all'icosaedro mobile, porta lo spigolo $\alpha\beta$ di esso a coincidere collo spigolo $\gamma\delta$ dell'icosaedro fisso.

mediante una rotazione di un multiplo di $\frac{2\pi}{5}$ intorno a μ. Indichiamo per un momento con M tale rotazione, e poniamo anche $N = TS^{\mu-2}$. La M è (art. 31) la trasformata mediante la N di una rotazione di eguale ampiezza di cui uno dei poli è 1, cioè di una rotazione S^λ, dove λ è uno dei numeri 0, 1, 2, 3, 4 (l'ipotesi $\lambda = 0$ corrisponderebbe al caso in cui ν già coincidesse con 2), quindi, per l'osservazione fatta poc'anzi:

$$NM = S^\lambda N = S^\lambda TS^{\mu-2}.$$

La rotazione considerata si compone dunque mediante le sole S, T, nel modo che risulta in quest'ultima formola.

c) μ è uno degli altri 6 vertici. Se diciamo $\mu'\nu'$ lo spigolo in cui si trasforma $\mu\nu$ per effetto della rotazione U, μ' sarà uno dei vertici 1, 2, ..., 6, quindi si potrà far coincidere 1.2 con $\mu'\nu'$ mediante una rotazione del tipo S^h oppure $S^h TS^k$. Ne segue che si farà coincidere 1.2 con $\mu\nu$ rispettivamente mediante la $S^h U$ o la $S^h TS^k U$.

Riassumendo: *Tutte le rotazioni del gruppo icosaedrico si esprimono mediante le S, T, U, e sono dei 4 tipi seguenti:*

$$S^h, \quad S^h TS^k, \quad S^h U, \quad S^h TS^k U \quad (h, k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Si verifica immediatamente che questi tipi comprendono sessanta rotazioni, tante appunto quante ne sono contenute nel gruppo icosaedrico.

Può aggiungersi che U è esprimibile mediante S e T.

Per ciò che si è detto poc'anzi, $S^2 T S^3$ porta 1 in 5. Per vedere dove essa porta il vertice 2, osserviamo che T porta 1.2 in 2.1, quindi $T S^3$ porta 1.2 in 5.1, e che moltiplicare a sinistra per S^2 equivale ad eseguire una rotazione di $\frac{4\pi}{5}$ intorno a 5, rotazione la quale porta 5.1 in 5.7. Sicchè, in conclusione, $S^2 T S^3$ porta 1.2 in 5.7.

D'altra parte $T S^2 T$ è la trasformata di S^2 mediante T, cioè è una rotazione di $\frac{4\pi}{5}$ intorno all'asse 2.7; essa porta 5.7 in 12.7.

Dunque la rotazione $S^2 T S^3 T S^2 T$ porta 1.2 in 12.7.

Ma lo stesso effetto ha la rotazione U; quindi:

$$S^2 T S^3 T S^2 T = U.$$

67. Le rotazioni 1, T, U, TU formano un sottogruppo trirettangolo del gruppo icosaedrico; gli assi delle tre rotazioni T, U, TU sono 3 mediane costituenti una terna ortogonale *. È evidente,

---

* È facile del resto trovare direttamente nella fig. 7 questa terna di mediane. Denotando le varie mediane nel modo che è detto più sotto nel testo, si vede che le (1.2 — 7.12), (4.5 — 9.10) giacciono nel piano $\xi\zeta$, e che le loro proiezioni sono $3''.11''$, $4''.10''$, le quali sono tra loro perpendicolari perchè diagonali di un rombo; inoltre la me-

per ragioni di simmetria, che esistono 5 di queste terne ortogonali, le quali si ottengono da una di esse facendola ruotare intorno all'asse ζ di un angolo $\frac{2\pi}{5}$ e dei suoi multipli. Le 15 mediane dell'icosaedro si dividono dunque in 5 terne ortogonali disposte simmetricamente intorno ad una diagonale qualunque.

Diciamo k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 le 5 terne di mediane. Ogni rotazione del gruppo icosaedrico muta una terna in sè stessa od in un'altra terna, sicchè alle 60 rotazioni del gruppo corrispondono 60 permutazioni delle 5 terne.

Vogliamo far vedere che queste sono tutte le permutazioni pari di 5 elementi.

Indichiamo perciò in generale con $(\alpha\beta - \gamma\delta)$ la mediana che congiunge il punto di mezzo dello spigolo $\alpha\beta$ con quello dello spigolo $\gamma\delta$. Avremo:

$$k_1 = (1.2 - 7.12),\ (3.11 - 6.8),\ (4.5 - 9.10),$$
$$k_2 = (1.3 - 8.12),\ (4.7 - 2.9),\ (5.6 - 10.11),$$
$$k_3 = (1.4 - 9.12),\ (5.8 - 3.10),\ (6.2 - 11.7),$$
$$k_4 = (1.5 - 10.12),\ (6.9 - 4.11),\ (2.3 - 7.8),$$
$$k_5 = (1.6 - 11.12),\ (2.10 - 5.7),\ (3.4 - 8.9).$$

L'effetto delle rotazioni S, T, U sui vertici e

---

diana (3.11 — 6.8) ha la direzione dell'asse η, quindi è perpendicolare alle altre due.

sulle mediane è riassunto nella tabella seguente:

1	S	T	U
1	1	2	12
2	3	1	7
3	4	6	11
4	5	9	10
5	6	10	9
6	2	3	8
7	8	12	2
8	9	11	6
9	10	4	5
10	11	5	4
11	7	8	3
12	12	7	1
k_1	k_2	k_1	k_1
k_2	k_3	k_3	k_5
k_3	k_4	k_2	k_4
k_4	k_5	k_5	k_3
k_5	k_1	k_4	k_2

Come si vede, le permutazioni subìte dalle k per effetto delle rotazioni S, T, U sono pari. Per conseguenza lo stesso può dirsi della permutazione corrispondente a qualunque rotazione del gruppo

icosaedrico, giacchè tutte queste rotazioni sono esprimibili come prodotto delle S, T, U. E poichè a rotazioni diverse corrispondono permutazioni diverse *, e le rotazioni del gruppo icosaedrico sono appunto tante quante sono le permutazioni pari di 5 elementi, rimane dimostrato l'asserto.

Vediamo quante sono le rotazioni del gruppo icosaedrico che mutano in sè stessa una data terna, per es. k_1. Le intersezioni della sfera colle tre mediane di cui consta k_1 sono i vertici d'un ottaedro regolare h_1, e le rotazioni della sfera che mutano in sè stessa la terna k_1 mutano pure in sè stesso l'ottaedro, cioè appartengono al gruppo ad esso relativo; e poichè tali rotazioni evidentemente costituiscono un gruppo (un sottogruppo del gruppo icosaedrico), questo coincide col gruppo relativo all'ottaedro h_1 o ne è un sottogruppo. Determiniamone l'ordine.

Uno dei vertici di h_1 può venire a coincidere o con sè stesso o con uno degli altri 5 vertici, e in ciascun caso lo spigolo (dell'icosaedro sferico) di cui esso è il punto di mezzo può coincidere collo spigolo avente per punto di mezzo l'altro vertice in due modi diversi; ciascuna coincidenza

* Se ciò non fosse, esisterebbe una rotazione non nulla che lascerebbe invariate tutte le terne, il che, come è facile vedere, è impossibile.

poi può ottenersi con una sola rotazione del gruppo icosaedrico (art. 51). Ne segue che il numero delle rotazioni del sottogruppo considerato è 12. Ma il solo sottogruppo d'ordine 12 d'un gruppo ottaedrico è un gruppo tetraedrico (art. 54); quindi *l'insieme delle rotazioni del gruppo icosaedrico che lasciano invariata una terna ortogonale di mediane costituisce un gruppo tetraedrico.*

Diciamo Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5 i sottogruppi tetraedrici che lasciano invariate rispettivamente le terne k_1, k_2, k_3, k_4, k_5. I poli delle rotazioni di Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5 si ottengono da quelli delle rotazioni di Γ_1 applicando ad essi le rotazioni S, S^2, S^3, S^4; ne segue (art. 31):

$$\Gamma_2 = S^{-1}\Gamma_1 S,\quad \Gamma_3 = S^{-2}\Gamma_1 S^2,\quad \Gamma_4 = S^{-3}\Gamma_1 S^3,\quad \Gamma_5 = S^{-4}\Gamma_1 S^4.$$

68. Costruiamo ora l'espressione analitica delle sostituzioni corrispondenti alle rotazioni S, T, U.

L'espressione della S è (art. 62):

$$z' = e^{\frac{2\pi i}{5}} z.$$

La U è quella stessa rotazione che negli articoli 63 e 64 era rappresentata da TU; la sua espressione è:

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

Per la T si ha:

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{l}{2},\quad \mu = 0,\quad \beta = \frac{\pi}{2},$$

quindi:

$$a = \operatorname{sen} \frac{l}{2}, \quad b = 0, \quad c = \cos \frac{l}{2}, \quad d = 0,$$

ossia (art. 65):

$$a = \sqrt{\frac{r-1}{2r}}, \quad b = 0, \quad c = \sqrt{\frac{r+1}{2r}}, \quad d = 0,$$

dove $r = \sqrt{5}$, sicchè la sostituzione cercata è:

$$z' = \frac{\sqrt{\frac{r+1}{2r}}\, z + \sqrt{\frac{r-1}{2r}}}{\sqrt{\frac{r-1}{2r}}\, z - \sqrt{\frac{r+1}{2r}}},$$

che può anche scriversi:

$$z' = \frac{\sqrt{r+1}\, z + \sqrt{r-1}}{\sqrt{r-1}\, z - \sqrt{r+1}},$$

od ancora:

$$z' = \frac{(r+1) z + 2}{2z - (r+1)}.$$

L'espressione di questa sostituzione si semplifica introducendo in essa il simbolo:

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}.$$

Troviamo i valori di $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{2\pi}{5}$. Osservando che nel triangolo sferico rettangolo considerato al principio dell'art. 65 l'angolo compreso fra i lati $\frac{l}{2}$, l è $\frac{2\pi}{5}$, si ha per una nota for-

mola di trigonometria sferica:

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\operatorname{tang}\frac{l}{2}}{\operatorname{tang} l},$$

ossia (v. art. cit.):

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r-1}{r+1}}=\frac{r-1}{4}=\frac{1}{r+1},$$

donde, tenuto conto che $(r+1)^2=6+2r$:

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}=\sqrt{1-\frac{r-1}{4(r+1)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3r+5}{r+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r(6+2r)}{2(r+1)}}=\frac{1}{4}\sqrt{2r(r+1)}\ *.$$

Ne segue:

$$\varepsilon=\tfrac{1}{4}\left[(r-1)+i\sqrt{2r(r+1)}\right].$$

Poichè, per una proprietà nota delle radici dell'unità, ε ed ε^4 sono quantità coniugate, si ha:

$$\varepsilon^4=\tfrac{1}{4}\left[(r-1)-i\sqrt{2r(r+1)}\right].$$

Inoltre:

$$\varepsilon^2+\varepsilon^3=-1-(\varepsilon+\varepsilon^4)=-1-\tfrac{1}{2}(r-1)=-\tfrac{1}{2}(r+1),$$

---

* Da queste espressioni risultano le formole:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{2r(r-1)},\quad \cos\frac{\pi}{5}=\frac{r+1}{4},$$

che ci saranno utili in seguito.

$$\varepsilon^2 - \varepsilon^3 = \varepsilon^2 - \varepsilon^8 = (\varepsilon + \varepsilon^4)(\varepsilon - \varepsilon^4)$$
$$= \tfrac{1}{2}(r - 1)\tfrac{1}{2} i \sqrt{2r(r+1)}$$
$$= \tfrac{1}{4} i (r-1)\sqrt{2r(r+1)} = \tfrac{1}{2} i \sqrt{2r(r-1)},$$

quindi:

$$\varepsilon^2 = \tfrac{1}{4}\left[-(r+1) + i\sqrt{2r(r-1)}\right],$$
$$\varepsilon^3 = \tfrac{1}{4}\left[-(r+1) - i\sqrt{2r(r-1)}\right].$$

Poniamo:

$$\sigma = \varepsilon - \varepsilon^4 = \tfrac{1}{2} i \sqrt{2r(r+1)},$$
$$\tau = \varepsilon^2 - \varepsilon^3 = \tfrac{1}{2} i \sqrt{2r(r-1)};$$

le σ, τ sono legate dalle relazioni:

$$\sigma\tau = -r, \quad \sigma^2 + \tau^2 = -5, \quad \sigma^2 - \tau^2 = -r.$$

La sostituzione T può scriversi:

$$z' = \frac{\sigma z + \tau}{\tau z - \sigma},$$

e la S:

$$z' = \varepsilon z,$$

quindi la S^h:

$$z' = \varepsilon^h z.$$

In base a queste formole si costruisce senza difficoltà il quadro delle sostituzioni del gruppo icosaedrico:

$$S^h = \begin{pmatrix} \varepsilon^h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$S^h T S^k = \begin{pmatrix} \varepsilon^{h+k}\sigma & \varepsilon^k \tau \\ \varepsilon^h \tau & -\sigma \end{pmatrix},$$
$$S^h U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^h & 0 \end{pmatrix},$$

$$S^h T S^k U = \begin{pmatrix} -\varepsilon^h \tau & \sigma \\ \varepsilon^{h+k} \sigma & \varepsilon^k \tau \end{pmatrix} *.$$

Per ciò che diremo fra poco interessa avere queste sostituzioni sotto forma di sostituzioni unitarie. Basta a tal uopo dividere i singoli elementi di ogni sostituzione per la radice quadrata del determinante della sostituzione stessa. Si ottiene così:

$$S^h = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\frac{h}{2}} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-\frac{h}{2}} \end{pmatrix},$$

$$S^h T S^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \varepsilon^{\frac{1}{2}(h+k)} \sigma & \frac{1}{r} \varepsilon^{\frac{1}{2}(-h+k)} \tau \\ \frac{1}{r} \varepsilon^{\frac{1}{2}(h-k)} \tau & -\frac{1}{r} \varepsilon^{-\frac{1}{2}(h+k)} \sigma \end{pmatrix},$$

$$S^h U = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-\frac{h}{2}} \\ -\varepsilon^{\frac{h}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$S^h T S^k U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \varepsilon^{\frac{1}{2}(h-k)} \tau & \frac{1}{r} \varepsilon^{-\frac{1}{2}(h+k)} \sigma \\ \frac{1}{r} \varepsilon^{\frac{1}{2}(h+k)} \sigma & \frac{1}{r} \varepsilon^{\frac{1}{2}(-h+k)} \tau \end{pmatrix}.$$

---

* Queste sostituzioni sono in parte diverse da quelle date da Klein come componenti il gruppo icosaedrico. Si passa dalle une alle altre col cambiamento di variabile:

$$z_1 = -z, \quad z_1' = -z'.$$

69. Sappiamo che le sostituzioni del gruppo icosaedrico sono degli ordini 2, 3, 5. Importa poter riconoscere immediatamente l'ordine di una data sostituzione del gruppo.

Ricordiamo che, quando una sostituzione è posta sotto la forma unitaria (3) dell'art. 61, si ha $d = \cos\beta$, essendo β la metà dell'ampiezza della rotazione corrispondente; ed osserviamo ancora che d è la semisomma del primo e dell'ultimo elemento della sostituzione. Abbiamo quindi:

Per la S^h:

$$(1) \qquad \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\frac{h}{2}} + \varepsilon^{-\frac{h}{2}}\right) = \cos\frac{h\pi}{5},$$

per la $S^h T S^k$:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\beta &= \frac{\sigma}{2r}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}(h+k)} - \varepsilon^{-\frac{1}{2}(h+k)}\right) \\ &= -\frac{\sigma}{ri}\,\mathrm{sen}\,\frac{h+k}{5}\pi, \end{aligned} \right.$$

per la $S^h U$:

$$(3) \qquad \cos\beta = 0,$$

per la $S^h T S^k U$:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\beta &= \frac{\tau}{2r}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}(-h+k)} - \varepsilon^{\frac{1}{2}(h-k)}\right) \\ &= \frac{\tau}{ri}\,\mathrm{sen}\,\frac{h-k}{5}\pi. \end{aligned} \right.$$

Dalla (1) segue che le S^h ($h = 1, 2, 3, 4$) sono d'ordine 5; dalla (3), che le $S^h U$ ($h = 0, 1, 2, 3, 4$) sono d'ordine 2.

Cerchiamo ora quali delle $S^h T S^k$ sieno d'ordine 2. Dev'essere $\beta = \frac{\pi}{2}$, quindi $\operatorname{sen} \frac{h+k}{5} \pi = 0$, donde:

$$h + k \equiv 0 \quad (\text{mod. } 5).$$

In secondo luogo cerchiamo quali delle $S^h T S^k$ sieno d'ordine 3. Dev'essere $\beta = \frac{\pi}{3}$ o $\frac{2\pi}{3}$, quindi $\cos \beta = \pm \frac{1}{2}$, e:

$$\operatorname{sen} \frac{h+k}{5} \pi = \mp \frac{ri}{2\sigma} = \mp \frac{r}{\sqrt{2r(r+1)}} = \mp \frac{1}{4} \sqrt{2r(r-1)},$$

donde (v. nota a pag. 123):

$$\operatorname{sen} \frac{h+k}{5} \pi = \mp \operatorname{sen} \frac{\pi}{5},$$

e quindi:

$$h + k \equiv \mp 1 \quad (\text{mod } 5).$$

Le rimanenti sostituzioni $S^h T S^k$, cioè quelle per cui:

$$h + k \equiv \mp 2 \quad (\text{mod } 5),$$

sono necessariamente d'ordine 5.

Facciamo lo stesso studio per le $S^h T S^k U$; troviamo:

Per l'ordine 2:

$$\operatorname{sen} \frac{h-k}{5} \pi = 0, \quad h - k \equiv 0 \quad (\text{mod } 5);$$

per l'ordine 3:

$$\operatorname{sen}\frac{h-k}{5}\pi = \pm\frac{ri}{2\tau} = \pm\frac{r}{\sqrt{2r(r-1)}}$$
$$= \pm\frac{1}{4}\sqrt{2r(r+1)} = \pm\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5},$$

quindi:
$$h-k \equiv \pm 2 \pmod 5;$$

per l'ordine 5:
$$h-k \equiv \pm 1 \pmod 5.$$

Riassumendo, il gruppo icosaedrico si compone delle seguenti sostituzioni (cfr. art. 53):

La sostituzione identica.

Le sostituzioni d'ordine 2:

$$S^h U \qquad (h = 0, 1, 2, 3, 4)$$
$$S^h T S^k \qquad (h, k = 0, 0;\ 1, 4;\ 2, 3;\ 3, 2;\ 4, 1)$$
$$S^h T S^k U \qquad (h, k = 0, 0;\ 1, 1;\ 2, 2;\ 3, 3;\ 4, 4).$$

Le sostituzioni d'ordine 3:

$$S^h T S^k \qquad (h, k = 0, 1;\ 1, 0;\ 2, 4;\ 3, 3;\ 4, 2;\ 0, 4;\ 1, 3;\ 2, 2;\ 3, 1;\ 4, 0)$$
$$S^h T S^k U \qquad (h, k = 0, 3;\ 1, 4;\ 2, 0;\ 3, 1;\ 4, 2;\ 0, 2;\ 1, 3;\ 2, 4;\ 3, 0;\ 4, 1).$$

Le sostituzioni d'ordine 5:

$$S^h \qquad (h = 1, 2, 3, 4)$$
$$S^h T S^k \qquad (h, k = 0, 2;\ 1, 1;\ 2, 0;\ 3, 4;\ 4, 3;\ 0, 3;\ 1, 2;\ 2, 1;\ 3, 0;\ 4, 4)$$
$$S^h T S^k U \qquad (h, k = 0, 4;\ 1, 0;\ 2, 1;\ 3, 2;\ 4, 3;\ 0, 1;\ 1, 2;\ 2, 3;\ 3, 4;\ 4, 0).$$

70. Tutte le reti considerate, compresa quella tetraedrica quando il poliedro si prenda nella se-

conda posizione, hanno per cerchio di simmetria il cerchio massimo intersezione della sfera col piano $\xi\zeta$. Ne segue che i relativi gruppi possono ampliarsi mediante la riflessione:

$$z' = \bar{z}.$$

È inutile scrivere qui per disteso le operazioni dei singoli gruppi ampliati; esse si ottengono aggiungendo alle operazioni dei gruppi primitivi quelle che risultano da esse ponendo $\bar{z}$ in luogo di z.

71. In base a quanto si è detto nell'art. 38, si possono immediatamente costruire i gruppi omogenei corrispondenti ai gruppi non omogenei sopra considerati. Noi ci limitiamo a darne la rappresentazione analitica.

Gruppi ciclici.

$$z_1' = \pm e^{\frac{k\pi i}{n}} z_1, \quad z_2' = \pm e^{-\frac{k\pi i}{n}} z_2 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

od anche:

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= e^{\frac{k\pi i}{n}} z_1, \quad z_2' = e^{-\frac{k\pi i}{n}} z_2 \\ z_1' &= e^{\frac{(k+n)\pi i}{n}} z_1, \quad z_2' = e^{-\frac{(k+n)\pi i}{n}} z_2 \end{aligned}\right\} (k=0, 1, \ldots, n-1),$$

o più semplicemente:

$$z_1' = e^{\frac{h\pi i}{n}} z_1, \quad z_2' = e^{-\frac{h\pi i}{n}} z_2 \quad (h = 0, 1, \ldots, 2n-1).$$

Gruppi diedrici. — Operando come testè si è fatto, si trova:

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= e^{\frac{h\pi i}{m}} z_1, & z_2' &= e^{-\frac{h\pi i}{m}} z_2 \\ z_1' &= i e^{\frac{h\pi i}{m}} z_2, & z_2' &= i e^{-\frac{h\pi i}{m}} z_1 \end{aligned}\right\} \quad (h = 0, 1, \ldots, 2m-1).$$

In particolare il gruppo omogeneo trirettangolo ($m = 2$) può scriversi così:

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= i^h z_1, & z_2' &= i^{-h} z_2 \\ z_1' &= i^{h+1} z_2, & z_2' &= i^{-h+1} z_1 = -i^{-(h+1)} z_1 \end{aligned}\right\} \quad (h = 0, 1, 2, 3),$$

o più semplicemente, ponendo nelle seconde formole h invece di $h+1$ ed osservando che, per essere $i^4 = 1$, mentre h percorre i valori 0, 1, 2, 3, si possono far percorrere ad $h+1$, invece dei valori 1, 2, 3, 4, gli stessi valori 0, 1, 2, 3:

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= i^h z_1, & z_2' &= i^{-h} z_2 \\ z_1' &= i^h z_2, & z_2' &= -i^{-h} z_1 \end{aligned}\right\} \quad (h = 0, 1, 2, 3).$$

Gruppo tetraedrico. — Posto:

$$\alpha = \frac{1+i}{2}, \quad \beta = \frac{1-i}{2}, \quad \delta = \pm 1, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

si ha:

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= i^h z_1, & z_2' &= i^{-h} z_2 \\ z_1' &= i^h z_2, & z_2' &= -i^{-h} z_1 \end{aligned}\right\} \quad (h = 0, 1, 2, 3),$$

$$\begin{aligned} z_1' &= \delta(\varepsilon\alpha z_1 - \beta z_2), & z_2' &= \delta(\alpha z_1 + \varepsilon\beta z_2), \\ z_1' &= \delta(\varepsilon\beta z_1 - \alpha z_2), & z_2' &= \delta(\beta z_1 + \varepsilon\alpha z_2), \\ z_1' &= \delta\beta(\varepsilon z_1 - z_2), & z_2' &= \delta\alpha(z_1 + \varepsilon z_2), \\ z_1' &= \delta\alpha(z_1 + \varepsilon z_2), & z_2' &= \delta\beta(-\varepsilon z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Gruppo ottaedrico. — Per ottenere le sostituzioni di questo gruppo, basta moltiplicare quelle del precedente per la sostituzione:

$$z'_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} z_1, \quad z'_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} z_2 .$$

Gruppo icosaedrico. — Tenendo conto che:

$$\varepsilon^{\frac{h}{2}} = (-1)^h \varepsilon^{\frac{6h}{2}} = (-1)^h \varepsilon^{3h},$$

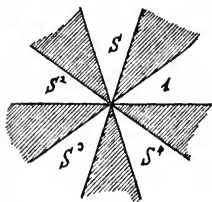
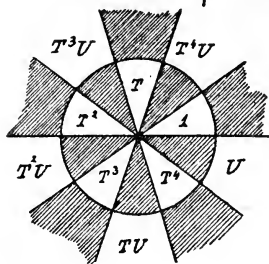
$$\varepsilon^{-\frac{h}{2}} = (-1)^h \varepsilon^{\frac{4h}{2}} = (-1)^h \varepsilon^{2h},$$

si trova:

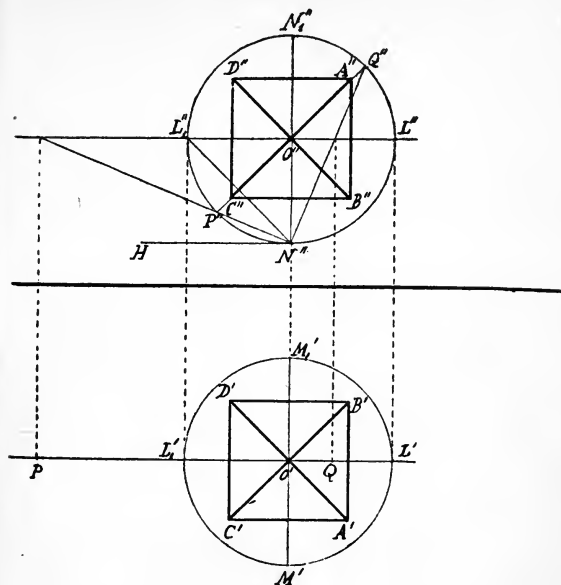
$$\left.\begin{array}{l}
z'_1 = \pm \varepsilon^{3h} z_1, \quad z'_2 = \pm \varepsilon^{2h} z_2 \\
z'_1 = \pm \varepsilon^{2h} z_2, \quad z'_2 = \mp \varepsilon^{3h} z_1 \\
\left\{\begin{array}{l} z'_1 = \pm \frac{1}{r}(\varepsilon^{3(h+k)} \sigma z_1 + \varepsilon^{2h+3k} \tau z_2) \\ z'_2 = \pm \frac{1}{r}(\varepsilon^{3h+2k} \tau z_1 - \varepsilon^{2(h+k)} \sigma z_2) \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} z'_1 = \pm \frac{1}{r}(\varepsilon^{3h+2k} \tau z_1 - \varepsilon^{2(h+k)} \sigma z_2) \\ z'_2 = \mp \frac{1}{r}(\varepsilon^{3(h+k)} \sigma z_1 + \varepsilon^{2h+3k} \tau z_2) \end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (h, k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Rappresentazione dei gruppi finiti sul piano.

72. Veniamo alla costruzione della rappresentazione piana dei gruppi alla quale accennammo nell'articolo 58. Prenderemo come centro della projezione stereografica il punto $(0, 0, -1)$, come piano di proiezione il piano $\xi\eta$, come assi x, y nel piano stesso gli assi ξ, η.

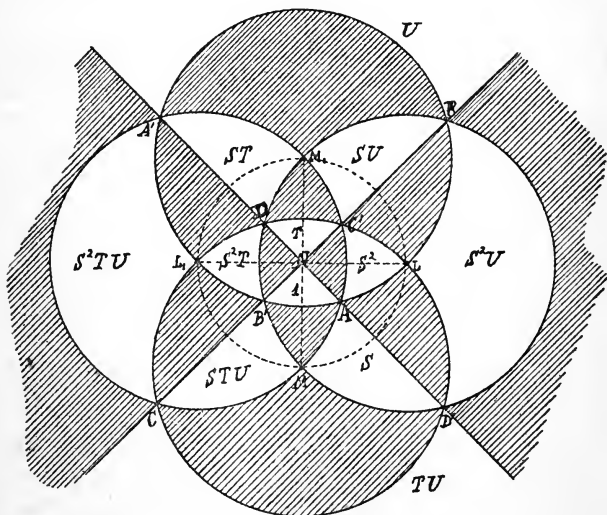
Pei gruppi ciclici e diedrici ci limitiamo a dare le sole figure.

(Fig. 8).

La rete tetraedrica si compone dei 6 cerchi massimi contenenti i 6 spigoli del tetraedro. Due di essi, cioè quelli contenenti gli spigoli AD, BC (v. fig. 5), passano pel centro di proiezione ed hanno l'inclinazione di 45° sul piano $\xi\zeta$; essi si proiettano in due rette passanti per l'origine ed inclinate a 45° sull'asse x. Cerchiamo di ottenere la proiezione di uno degli altri 4 cerchi, per es. di quello contenente lo spigolo AC. A tal uópo rappresentiamoci col metodo di Monge la sfera e il tetraedro iscritto, e sieno P, Q le intersezioni del piano $\xi\zeta$ col cerchio massimo (posto in un piano ad esso perpendicolare) contenente i punti A, C. Sieno L, L_1; M, M_1; N, N_1 le intersezioni della sfera coi tre assi, e per N'' si conduca $N''H$ parallela alla linea di terra. Siccome $P''Q''$ è inclinata a

45° sugli assi ξ, ζ, sarà $HN''P''=P''N''L_1''=\frac{\pi}{8}$, sicchè le $N''P''$, $N''Q''$ saranno le bisettrici de-

(*Fig. 9*).

gli angoli dei raggi $N''H$, $N''L_1''$. Ne segue che il fascio $N''(Q''L_1''P''H)$ è armonico. Quindi, se P, Q, L_1 sono le proiezioni stereografiche sul piano icnografico dei punti designati colle stesse lettere, il gruppo di punti $QL_1P\infty$ è armonico, cioè L_1 è il punto di mezzo del segmento QP. Ora la proiezione stereografica del cerchio conside-

rato deve passare per P, Q, ed inoltre, essendo il piano del cerchio perpendicolare al piano $\xi\,\zeta$, il centro della proiezione deve giacere sul segmento $P\,Q$; dunque questo centro è L_1. Sarebbe facile verificare che il cerchio passa (come deve accadere) per i punti M, M_1. Il raggio del cerchio è dunque $\sqrt{2}$.

Pertanto, per descrivere la figura voluta, basta prendere per centro ciascuno dei punti d'incon-

(Fig. 10).

tro dell'equatore cogli assi e far passare il cerchio per i due punti adiacenti.

I quattro cerchi così descritti, insieme alle due rette già menzionatè, dividono il piano in 24 triangoli. Noi ne tratteggeremo 12 in modo che due triangoli adiacenti qualunque risultino sempre, l'uno bianco, l'altro tratteggiato. Scegliamo come triangolo d'origine uno qualunque dei triangoli bianchi, per es. quello che ha un vertice nell'origine ed un'altro in A. Il triangolo T si ottiene da 1 con una rotazione di π intorno al punto N_1, i triangoli S, S^2 con rotazioni di $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ intorno ad A. Da S, S^2 si ricavano subito ST, $S^2 T$; poi con una rotazione di π intorno all'asse x si hanno i rimanenti triangoli U, TU, SU, $S^2 U$, STU, $S^2 TU$.

73. Vogliamo ora cambiare il centro di proiezione, prendendo come tale il centro sferico di una delle facce del tetraedro, per es. A'. Allora A si proietta nell'origine, e i cerchi $ABA'B'$, $ACA'C'$, $ADA'D'$ hanno per imagini tre rette egualmente inclinate uscenti da A. I punti B, C, D stanno su queste rette formando un triangolo equilatero il cui centro è A. Segnati questi punti, la cui distanza comune da A può prendersi ad arbitrio *, si trovano gli altri osservando che, siccome C, D, B', A', vertici di una faccia del cubo $AB'DC'BD'CA'$, si trovano in un piano, e

* Se 1 è il raggio della sfera, si ha $AB = \sqrt{2}$.

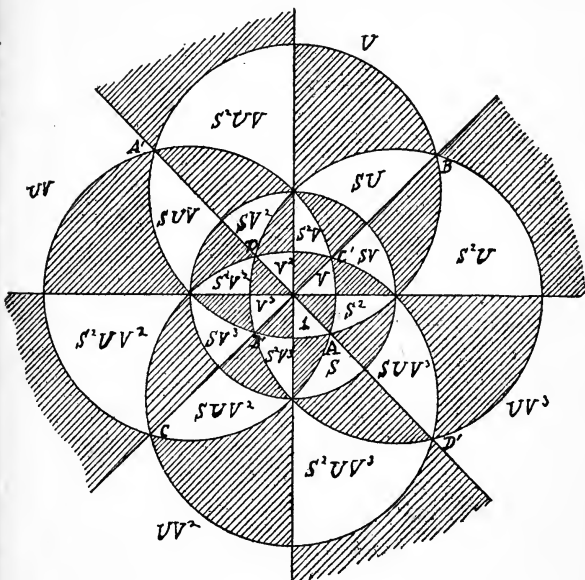
quindi sopra un cerchio, l'imagine di B' dovrà stare sulla congiungente le imagini di C e di D. Il punto B' è dunque l'intersezione di CD col prolungamento di BA, e analogamente sono determinati i punti C', D'. Per completa-

(*Fig.* 11).

re la figura, restano a tracciarsi i cerchi $CDC'D'$, $DBD'B'$, $BCB'C'$, ed è facile dimostrare che i loro centri sono rispettivamente B', C', D'; basta perciò osservare che il triangolo $BC'D'$ ed i suoi analoghi sono equilateri.

74. Nella figura 10 si trova già disegnato il cubo (sferico) $AB'DC'BD'CA'$, i cui cerchi di simmetria sono gli stessi dell'ottaedro avente per diagonali gli assi coordinati. Per avere la rete ottaedrica, non v'è dunque più che da aggiungere i cerchi di simmetria che ancora mancano, cioè quelli contenenti le mediane delle varie facce del cubo; questi cerchi sono quelli determinati sulla sfera dai

tre piani coordinati, ed hanno per proiezioni i due assi coordinati e il cerchio equatoriale.

Prendiamo come triangolo 1 quello che ha un vertice nell'origine ed un altro in A. I rimanenti triangoli intorno all'origine avranno i simboli V, V^2, V^3, mentre gli altri triangoli intorno ad A avranno

(Fig. 12).

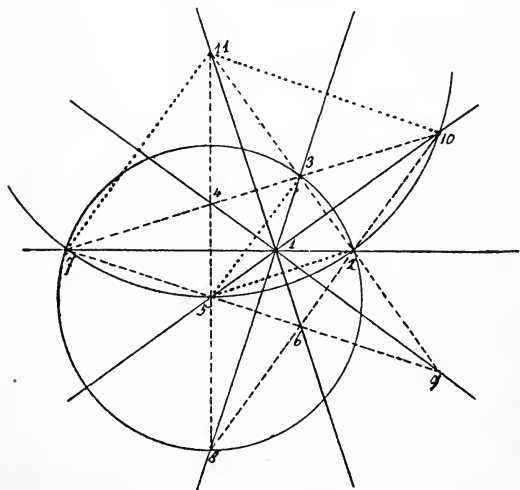
i simboli S, S^2. Ruotando intorno all'origine di $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ si ottengono dai triangoli S, S^2 rispet-

tivamente i triangoli $S V$, $S V^2$, $S V^3$, e $S^2 V$, $S^2 V^2$, $S^2 V^3$. Ruotando intorno all'asse x si ottengono U, $S U$, $S^2 U$, e da questi con rotazioni intorno all'origine i rimanenti $U V$, $U V^2$, $U V^3$, $S U V$, $S U V^2$, $S U V^3$, $S^2 U V$, $S^2 U V^2$, $S^2 U V^3$.

75. Per avere la rappresentazione sul piano del gruppo icosaedrico, importa anzitutto fissare le proiezioni dei vertici dell'icosaedro. Manterremo la disposizione e le notazioni delle figure 6 e 7. Allora, essendo 12 il centro di proiezione, esso si proietta nel punto all'infinito, mentre il vertice 1 ha per proiezione l'origine. La proiezione del vertice 2 sta sull'asse x positivo e dista dall'origine di un segmento eguale ad $O'' H''$ (fig. 7), mentre la proiezione del vertice 7 sta sull'asse x negativo e dista dall'origine di un segmento eguale ad $O'' K''$ *. Le proiezioni degli altri vertici formano rispettivamente con quelle di 2 e di 7 due pentagoni regolari aventi il centro nell'origine. Come verifica, può osservarsi che i punti 4, 5, 8, 11, giacendo (art. 65) sopra un cerchio che passa per il centro di proiezione 12, devono avere le loro proiezioni in linea retta; lo stesso può dirsi dei punti 5, 6, 9, 7; 6, 2, 10, 8; 2, 3, 11, 9; 3, 4, 7, 10. Quindi

* Se 1 è il raggio della sfera, si trova $O H'' = \frac{r - 1}{2}$, $O K'' = \frac{r + 1}{2}$.

i punti 7, 8, 9, 10, 11 risultano essere i vertici di un pentagono stellato, i cui lati sono i prolungamenti di quelli del pentagono convesso 2, 3, 4, 5, 6.

Cerchiamo ora le proiezioni dei cerchi di simmetria. Quelli passanti per 1 e per 12 si proiettano in 5 rette uscenti dall'origine ed egualmente inclinate fra loro, una delle quali è l'asse x. Consideriamo ora per es. il cerchio di simmetria contenente i vertici 2, 3, 7, 8. Esso si proietta naturalmente in un cerchio passante per le proiezioni di questi vertici. Dimostriamo che il centro di questo

(Fig. 13).

cerchio è 5. Che sia $5.2 = 5.3$ e $5.7 = 5.8$ è evi-

dente; inoltre gli angoli 5.3.7 e 5.7.3 hanno ambidue l'ampiezza $\frac{\pi}{5}$ *, quindi 5.3=5.7. Analogamente 6, 2, 3, 4 sono centri delle proiezioni di altri 4 cerchi di simmetria.

Consideriamo invece il cerchio di simmetria passante pei vertici 2, 10, 7, 5. Dimostreremo che il centro della sua proiezione è il punto 11. Che sia 11.2 = 11.5 e 11.7 = 11.10 è evidente; inoltre, siccome:

$$11.7.10 = 10.7.9 = \frac{\pi}{5},$$

$$11.5.7 = \pi - 4.5.6, \quad 4.5.6 = \frac{3\pi}{5},$$

si ha:

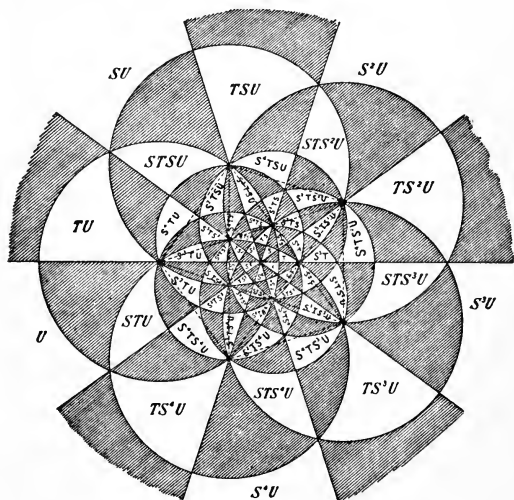
$$11.7.5 = \frac{2\pi}{5} = 11.5.7,$$

quindi 11.5 = 11.7. Analogamente 7, 8, 9, 10 sono centri delle proiezioni di altrettanti cerchi di simmetria.

Riassumendo, la rappresentazione del gruppo icosaedrico consta di 5 rette uscenti dall'origine e di 10 cerchi 5 a 5 eguali aventi i loro centri nei punti 2, 3, ..., 11.

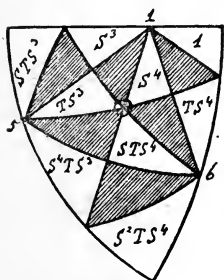
---

* Basta osservare che 5.3.7 è angolo alla base del triangolo isoscele 4.3.5 formato da due lati e da una diagonale del pentagono regolare convesso 2.3.4.5.6, e che 5.7.3 è angolo del pentagono regolare stellato 7.8.9.10.11.

Tratteggiamo la metà dei triangoli formati dai cerchi descritti, e poi prendiamo come triangolo 1 quello avente un vertice in 1 e un lato lungo l'asse x positivo. Ruotando intorno al punto 1 potremo segnare i triangoli S, S^2, S^3, S^4. Ruotando intorno al punto di mezzo dello spigolo 1.2 avremo T, e da questo ruotando intorno al punto 2, per un'osservazione già fatta (art. 66), i triangoli ST, S^2T, S^3T, S^4T.

(Fig. 14).

Ruotando invece intorno ad 1, aviemo da T i triangoli TS, TS^2, TS^3, TS^4; e parimenti da $S^hT (h = 1, 2, 3, 4)$ i triangoli S^hTS, S^hTS^2,

$S^h TS^3$, $S^h TS^4$. Applicando ai 30 triangoli segnati una rotazione di π intorno all'asse y, otterremo finalmente i triangoli aventi i simboli $S^h U$ e $S^h TS^k U$ (h, $k = 0, 1, 2, 3, 4$) *.

Abbiamo già avuto occasione di considerare le 5 terne di mediane ortogonali dell'icosaedro (art. 67). Gli estremi di ciascuna delle terne sono i vertici d'un ottaedro regolare, e i centri sferici delle facce dei 5 ottaedri sono punti appartenenti all'insieme dei centri sferici delle facce dell'icosaedro, come risulta evidente dalla fig. 15, in cui è riprodotta, in proporzioni più grandi, la parte della fig. 14 costituita da una faccia dell'ottaedro h_1 corrispondente alla terna k_1 **. Poichè le facce degli ottaedri sono in tutto 40 e quelle dell'icosaedro 20, il centro sferico d'ogni faccia dell'icosaedro è centro sferico di due delle facce degli ottaedri.

(Fig. 15).

* Nella fig. 14 le dimensioni furono ridotte alla metà rispetto a quelle delle figure 7 e 13.

** Osservando infatti la figura, si vede che i 15 triangoli di cui si compone la faccia dell'ottaedro sono egualmente disposti intorno al centro sferico della faccia 1.5.6 dell'icosaedro, il quale nella figura è segnato con un piccolo circolo.

Considerazioni generali sulle reti di triangoli.

76. Ciascuna delle reti di triangoli costruite nel capitolo precedente possiede le seguenti proprietà *):

1. Essa può essere generata da uno qualunque dei suoi triangoli mediante simmetria;
2. Tutti i triangoli hanno gli stessi angoli, che sono summultipli di π;
3. Essa ricopre il piano una volta sola, cioè non si sovrappone mai a sè stessa;
4. Essa ricopre il piano completamente;
5. Consta di un numero finito di triangoli;
6. Gli angoli che stanno intorno ad uno stesso nodo sono tutti eguali.

Noi avremo a considerare nel seguito reti di triangoli prive di alcune di queste proprietà; e perciò ci converrà distinguere coll'appellativo di *regolari* quelle che hanno la proprietà 6, e con quello di *finite* quelle che hanno la proprietà 5.

Per ora esaminiamo di quale natura debba essere una rete, la quale abbia le proprietà 1 e 3. Consideriamo uno dei vertici del triangolo generatore; esso sarà vertice comune di altri triangoli

* È quasi inutile avvertire che queste proprietà non sono tutte indipendenti tra loro.

alternativamente eguali e simmetrici, e, poichè la rete non deve sovrapporsi a sè stessa, dopo un numero pari di triangoli, compreso il triangolo primitivo, si dovrà ritrovare quest'ultimo.

Ne segue, in primo luogo, che gli angoli intorno a quel punto saranno tutti eguali, in secondo luogo, che essi saranno summultipli di π. Dunque:

Una rete, che può essere generata da un triangolo mediante simmetria e non ricopre mai sè stessa, è regolare, e gli angoli dei suoi triangoli sono summultipli di π.

Al contrario una tale rete non possiede necessariamente le proprietà 4 e 5.

Prendiamo a considerare una delle reti finite già studiate. Sappiamo che, se $2n$ è il numero dei triangoli della rete e $\frac{\pi}{\nu_1}$, $\frac{\pi}{\nu_2}$, $\frac{\pi}{\nu_3}$ sono gli angoli di ciascun triangolo, si ha:

$$\frac{\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_2} + \frac{\pi}{\nu_3} = \pi + \frac{2\pi}{n},$$

da cui:

$$\frac{\pi}{\nu_1} + \frac{\pi}{\nu_2} + \frac{\pi}{\nu_3} > \pi \text{ *)},$$

* Questa relazione risulta immediatamente, se si considera che ognuno dei triangoli considerati è la proiezione stereografica d'un triangolo sferico e quindi ha gli stessi angoli di questo, e che la somma degli angoli di qualunque triangolo sferico è maggiore di due angoli retti.

ossia:

$$(a) \qquad \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} > 1.$$

Supponiamo ora che sia dato un triangolo, i cui angoli $\frac{\pi}{\nu_1}$, $\frac{\pi}{\nu_2}$, $\frac{\pi}{\nu_3}$ non soddisfacciano alla condizione (a). Potranno aver luogo due casi, e cioè:

$$(b) \qquad \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1,$$

$$(c) \qquad \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} < 1.$$

Per distinguere facilmente i 3 casi, procediamo così. Sieno a, b, c i tre lati del triangolo, α, β, γ i vertici ad essi rispettivamente opposti. Se il triangolo ha due lati non rettilinei, per es. b, c, detto α_1 il secondo punto d'incontro dei cerchi a cui questi lati appartengono, applichiamo una inversione (art. 19) considerando α_1 come origine. Allora i cerchi di cui fanno parte b e c si mutano in rette, ed otteniamo un nuovo triangolo cogli angoli eguali a quelli del primo (art. 17) e con due lati almeno rettilinei. È chiaro che questo triangolo ha il terzo lato rettilineo nel caso (b), concavo verso il vertice opposto nel caso (a), convesso nel caso (c).

77. Del caso (a) furono già esaminate tutte le possibilità.

Il caso (*b*) si esaurisce facilmente.

Supposto $\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3$, è chiaro che dev'essere $\nu_1 < 4$.

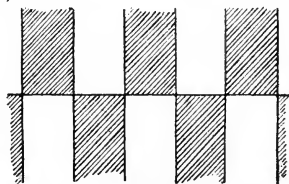
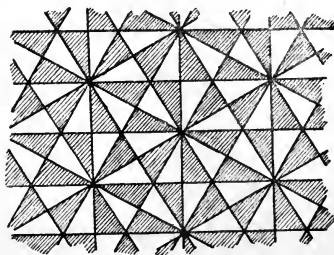
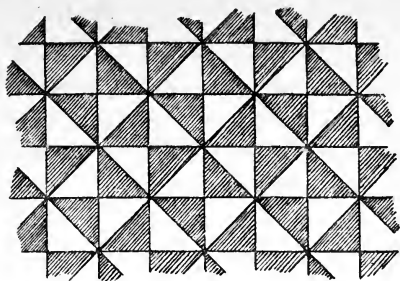
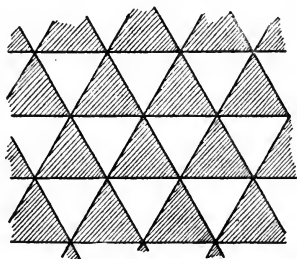
Se $\nu_1 = 2$, si ha:

$$\frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{2},$$

quindi $2 \leqq \nu_2 \leqq 4$, sicchè si hanno le tre soluzioni: $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = \infty$; $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = 6$; $\nu_2 = \nu_3 = 4$.

Se $\nu_1 = 3$, si ha:

$$\frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = \frac{2}{3},$$

quindi, dovendo essere $\nu_2 \geqq 3$, si ha la sola soluzione $\nu_2 = \nu_3 = 3$.

(Fig. 16)

(Fig. 17)

(Fig. 18)

(Fig. 19)

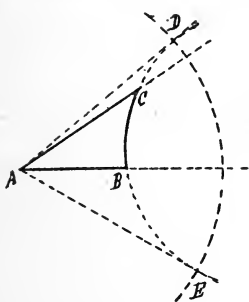
Riassumendo, il caso (*b*) dà luogo ai 4 tipi:

$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 2, \quad \nu_3 = \infty;$$
$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 3, \quad \nu_3 = 6;$$
$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 4, \quad \nu_3 = 4;$$
$$\nu_1 = 3, \quad \nu_2 = 3, \quad \nu_3 = 3.$$

Nelle figure sono rappresentate le reti corrispondenti. Esse possiedono tutte le proprietà enumerate nell'articolo precedente, meno la 5, cioè sono infinite.

Se dal caso d'un triangolo generatore con due lati rettilinei ritorniamo a quello più generale d'un triangolo generatore qualunque (v. la fine dell'art. prec.), avremo, in luogo delle rette, che sono cerchi passanti tutti pel punto all'infinito, infiniti cerchi passanti tutti per un punto. Può dirsi dunque che al caso (*b*) corrispondono reti infinite ricoprenti tutto il piano e formate di cerchi passanti tutti per un medesimo punto.

78. Il caso (*c*) dà luogo evidentemente ad infiniti tipi.

Sia ABC il triangolo dato, dove AB, AC si suppongono rettilinei, e BC circolare e convesso verso il punto A. Da A potremo condurre due tangenti AD, AE al cerchio di cui fa parte BC, e l'angolo BAC sarà contenuto nell'angolo EAD o tutt'al più potrà coincidere con esso (quando gli angoli B, C fossero nulli). Il cerchio di centro A passante per D

(Fig. 20)

e per E taglierà dunque ortogonalmente i prolungamenti di tutti i tre lati del triangolo dato. Imaginiamo di costruire il triangolo simmetrico di ABC rispetto ad uno qualunque dei suoi lati. Il cerchio DE, essendo ortogonale ai tre lati, è simmetrico

di sè stesso rispetto a qualunque di essi; e poichè nella simmetria gli angoli si conservano, esso taglia ortogonalmente anche i prolungamenti dei tre lati del nuovo triangolo. Concludendo: *Una rete del tipo (c) ha tutti i suoi lati tagliati ortogonalmente da un medesimo cerchio, e resta tutta da una stessa parte di esso; i vertici degli angoli nulli* — se ve ne sono —, *e solo questi, giacciono sul cerchio.*

Vedesi da ciò, che le reti del tipo (*c*) non hanno la proprietà 4 dell'articolo 76; esse infatti ricoprono una sola delle due parti in cui un certo cerchio divide il piano.

Di una speciale rete del tipo (*c*) dovremo occuparci tra poco, di quella cioè che rappresenta il *gruppo modulare.*

79. *Una rete di triangoli è l'imagine di un gruppo di sostituzioni lineari e del suo gruppo ampliato.*

Abbiasi un triangolo *a*, e sia *b* un altro triangolo bianco della rete da esso generata mediante simmetria. Da *a* si passa a *b* mediante un numero pari di trasformazioni per simmetria; ma ciascuna di queste è (art. 41) l'imagine di una pseudosostituzione, e il prodotto di un numero pari di pseudosostituzioni è (art. 39) una sostituzione, quindi da *a* a *b* si passa mediante una sostituzione lineare. Data dunque una rete, può trovarsi un

corrispondente insieme di sostituzioni lineari; esse sono le sostituzioni che mutano la rete in sè stessa, e, fissato uno dei triangoli bianchi come triangolo primitivo, resta stabilita anche una corrispondenza biunivoca tra le sostituzioni dell'insieme e i triangoli bianchi della rete.

È chiaro, che l'insieme di sostituzioni è sempre lo stesso, qualunque sia il triangolo della rete che si assume come primitivo.

Diciamo S la sostituzione che trasforma a in b, e sia c un terzo triangolo bianco. Poichè può considerarsi anche b come il triangolo generatore della rete, esisterà nell'insieme delle sostituzioni una sostituzione S' che muta b in c. Il prodotto SS' sarà una sostituzione che muterà a in c, e poichè nell'insieme considerato v'ha una ed una sola sostituzione S'' avente questa proprietà, sarà $S'' = SS'$. Dunque le sostituzioni trovate costituiscono un gruppo, che indicheremo con G. Questo gruppo contiene evidentemente l'identità; inoltre esso contiene l'inversa di ogni sua sostituzione, giacchè se, considerando a come generatore, S è la sostituzione che muta a in b, considerando invece b come generatore, S^{-1} è la sostituzione che muta b in a.

È evidente poi che l'insieme delle operazioni che mutano un dato triangolo bianco della rete in tutti i triangoli bianchi e tratteggiati di essa non è altro che il gruppo ampliato $\overline{G}$.

Chiamiamo per brevità *bitriangolo* la figura costituita da due triangoli adiacenti, e supponiamo che i bitriangoli abbiano forma triangolare *. Sia a il bitriangolo generatore, e sieno a_1, a_2, a_3 i bitriangoli ad esso adiacenti, S_1, S_2, S_3 le sostituzioni che mutano a rispettivamente in a_1, a_2, a_3. Mediante prodotti di queste sostituzioni a_1, a_2, a_3 si muteranno rispettivamente nei bitriangoli ad essi adiacenti; e così di seguito. Dato pertanto un bitriangolo qualunque b, e tenuto conto che la rete costituisce un campo connesso, è chiaro che la sostituzione che muta a in b potrà essere espressa come un prodotto contenente le sole sostituzioni S_1, S_2, S_3. Queste chiamansi le *sostituzioni generatrici* del gruppo **.

80. Diremo che due punti del piano sono *omologhi* rispetto ad un gruppo di operazioni, se esiste un'operazione del gruppo che muta uno di essi nell'altro. Due campi costituiti di punti rispettivamente omologhi diconsi *omologhi*.

L'omologia gode delle 3 proprietà fondamentali dell'eguaglianza, purchè il gruppo contenga

* Ciò può aver luogo sempre e soltanto quando i triangoli hanno un angolo retto.

** È utile notare che S_1, S_2, S_3 non sono necessariamente indipendenti tra loro. Se i bitriangoli non avessero forma triangolare, il numero delle sostituzioni generatrici sarebbe maggiore di 3.

l'operazione identica e l'inversa di ogni sua operazione. Infatti:

a) *Ogni punto è omologo a sè stesso,* giacchè il gruppo contiene l'operazione identica che permette di passare da un punto qualunque al punto medesimo;

b) *Se A è omologo a B, B è omologo ad A,* giacchè, se nel gruppo v'è l'operazione P che muta A in B, v'è pure l'operazione P^{-1} che muta B in A;

c) *Se A è omologo a B e B è omologo a C, A è omologo a C,* giacchè, se P muta A in B e Q muta B in C, PQ, che appartiene pure al gruppo, muta A in C.

Rispetto ad un gruppo di sostituzioni d'ordine finito n i punti del piano si scindono in sistemi di n punti omologhi. Fanno eccezione i nodi della rete corrispondente al gruppo, i quali formano sistemi rispettivamente di $\frac{n}{\nu_1}$, $\frac{n}{\nu_2}$, $\frac{n}{\nu_3}$ punti omologhi. Però, se consideriamo i nodi come punti ν_i-pli, possiamo dire in generale che *rispetto ad un gruppo di sostituzioni d'ordine n qualunque punto del piano appartiene ad un sistema di n punti omologhi.*

81. Abbiasi una rete di triangoli, e sia a un bitriangolo qualunque di essa.

Un punto interno di a non ha altro omologo in a che sè stesso, mentre ha un suo omologo in

ciascuno degli altri bitriangoli. Abbiasi invece un punto posto su uno dei lati del bitriangolo *a*; siccome esso può considerarsi anche come appartenente ad un bitriangolo adiacente, dovrà avere un suo omologo sul contorno di *a*. Dunque *ogni punto del contorno di a diverso dai vertici ha uno ed un solo suo omologo sul contorno stesso* (il quale potrà eventualmente coincidere col punto medesimo). *Infine un vertice di a ha come omologhi altrettanti vertici di a* (non necessariamente distinti) *quanti sono i bitriangoli a cui esso è comune.*

Quindi, se si prende un bitriangolo qualunque, e si considera come appartenente ad esso soltanto una parte opportunamente determinata del suo contorno, si ha un campo connesso fornito della duplice proprietà, di non contenere alcuna coppia di punti omologhi, e di contenere un punto omologo a ciascun punto della rete. Un tal campo dicesi un *campo fondamentale.*

Data una rete, v'ha un grande arbitrio nella scelta del campo fondamentale. Infatti, se *l*, *l'* sono due parti omologhe del suo contorno non aventi alcun punto comune, noi possiamo togliere dal bitriangolo una sua parte adiacente ad *l*, aggiungendo invece la parte omologa della rete che si appoggia ad *l'*, e la figura risultante, fatte le opportune convenzioni riguardo al contorno, è ancora un campo fondamentale. Siffatte modificazioni, che mutano

un campo fondamentale in un campo fondamentale, si dicono *mutamenti leciti*.

82. Abbiasi una rete, e sia G il corrispondente gruppo di sostituzioni lineari, H un sottogruppo di G di indice finito s. Riprendendo le notazioni dell'art. 9, sieno:

$$P_0 = 1, \quad P_1, \quad P_2, \ldots$$

le sostituzioni di H; quelle di G si potranno disporre in una tabella della forma seguente:

$$(1) \left\{ \begin{array}{llll} P_0 = 1, & P_1, & P_2, \ldots & \\ Q_1 P_0 = Q_1, & Q_1 P_1, & Q_1 P_2, & \ldots \\ Q_2 P_0 = Q_2, & Q_2 P_1, & Q_2 P_2, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{s-1} P_0 = Q_{s-1}, & Q_{s-1} P_1, & Q_{s-1} P_2, & \ldots \end{array} \right.$$

Indichiamo con 1 il bitriangolo, supposto di forma triangolare, che consideriamo come generatore della rete, con S_1, S_2, S_3 i suoi adiacenti che si ottengono da esso rispettivamente mediante le sostituzioni S_1, S_2, S_3 generatrici del gruppo G. Il bitriangolo 1 non può essere omologo a tutti e tre i bitriangoli S_1, S_2, S_3 rispetto ad H, giacchè, se ciò fosse, H conterrebbe le sostituzioni S_1, S_2, S_3 e quindi tutte le sostituzioni di G, e però sarebbe identico a G. Sia per esempio 1 omologo ad S_2 e ad S_3, ma non ad S_1; e sieno S_{12}, S_{13} i bitriangoli adiacenti ad S_1 oltre 1. Se S_{12}, S_{13} sono omologhi ad 1 o ad S_1, limitiamo la nostra

considerazione al campo formato dai bitriangoli 1, S_1; se invece per es. S_{12} non è omologo ad alcuno di questi due bitriangoli, consideriamo il campo formato dai bitriangoli 1, S_1, S'_{12}, e continuiamo allo stesso modo. Il processo avrà un termine dopo un numero finito di operazioni; infatti, siccome i bitriangoli corrispondenti alle sostituzioni di una stessa linea della precedente tabella sono tra loro omologhi rispetto ad H, dopo aver trovato tutt'al più s bitriangoli non omologhi tra loro non potremo che ricadere sopra bitriangoli omologhi a qualcuno di questi. Verremo dunque a formare un campo connesso C, composto di non più di s bitriangoli non omologhi tra loro. Se potremo dimostrare che qualunque punto della rete ha un suo omologo in C, ne risulterà che C è composto precisamente di s bitriangoli; infatti, se il numero di essi fosse minore di s, esisterebbe qualche linea della tabella (1) tale che nessuno dei triangoli corrispondenti ai suoi elementi apparterrebbe a C, e quindi vi sarebbero punti della rete non aventi in C alcun omologo.

Per stabilire il nostro asserto, facciamo dapprima un'osservazione. Sia a un bitriangolo esterno al campo C e adiacente ad esso, b il bitriangolo interno a C adiacente ad a. Se a non fu compreso nel campo C, ciò vuol dire che esiste in C un bitriangolo a' omologo ad a. Fra i bitriangoli con-

tigui ad a' ve ne deve essere uno b' omologo a b, ma esso è necessariamente esterno a C perchè b è interno, quindi b' si appoggia al contorno di C. Pertanto abbiamo sul contorno di C due archi omologhi: quello che divide a da b, e quello che divide a' da b'. — Il ragionamento fatto dimostra che i punti del contorno di C sono due a due omologhi rispetto al gruppo H.

Ciò premesso, sia z un punto qualunque della parte del piano ricoperta dalla rete. Preso un punto qualunque z_0 entro C, si congiunga z_0 con z mediante una linea l che non esca dal campo occupato dalla rete ed incontri un numero finito di triangoli. Sia z_1 il primo punto in cui la linea incontra il contorno di C, e sieno a_1, a_2, ... i bitriangoli esterni a C che essa successivamente attraversa, l_1, l_2, ... i tratti di essa rispettivamente contenuti in questi bitriangoli, m il tratto terminante in z. Per ciò che si è detto, esisterà sul contorno di C un punto z_1' omologo di z_1, e partendo da z_1' si potrà tracciare entro C un tratto di linea l_1' omologo al tratto l_1, poi un tratto l_2' omologo al tratto l_2, e così di seguito. Il processo avrà un termine dopo un numero finito di operazioni, e il punto nel quale termina il tratto m' omologo di m sarà il punto del campo C che è omologo di z.

Dunque ogni punto della rete ha un suo omologo in C.

Riassumendo: *Se H è un sottogruppo di G di indice finito s, si può formare mediante s bitriangoli della rete corrispondente a G un campo fondamentale C di H.* L'intera rete di G potrà scomporsi in campi omologhi a C rispetto ad H; questi campi costituiranno la rete (poligonale) relativa al gruppo H, e potrà dirsi che questa rete è *contenuta* in quella di G, nel senso che i lati e i nodi di H sono pure lati e nodi di G, senza che avvenga l'inversa. Possiamo concludere che: *Dato un gruppo ed un suo sottogruppo, la rete del secondo è contenuta in quella del primo.*

83. Sia H' un sottogruppo di G equivalente ad H; e supponiamo:

$$H' = S^{-1} H S.$$

Se z, z' sono due punti omologhi tra loro rispetto ad H, Sz, Sz' lo sono rispetto ad H' (art. 2). Ne segue che, se si applica al campo C la sostituzione S, il campo $C' = S C$ così ottenuto è un campo fondamentale per il sottogruppo H'. Più semplicemente, se al triangolo a cui si era applicato prima il simbolo 1 si applica ora il simbolo S, C diviene un campo fondamentale di H'. Osservando che, se al bitriangolo 1 si assegna il simbolo S, il simbolo 1 va a cadere nel bitriangolo

S^{-1} o nel suo omologo contenuto in C, concludiamo che: *Il campo C può considerarsi come il campo fondamentale di diversi sottogruppi equivalenti, a seconda che si assegna il simbolo* 1 *a diversi suoi bitriangoli.*

Di qui viene un'importante conseguenza: *Se H è un sottogruppo invariante di G, S una sostituzione qualunque di G, C un campo fondamentale di H, SC è pure un campo fondamentale di H*, o, in altre parole, *S trasforma C in sè stesso, a meno di mutamenti leciti* *.

Un artificio geometrico permette di presentare questi risultati sotto forma più semplice.

Si è veduto che le parti del contorno di C sono due a due omologhe.

Trasformiamo C, mediante deformazione continua, in una superficie chiusa, portando a coincidere e saldando insieme le parti omologhe del suo contorno. È chiaro che se, invece che da C, par-

---

* Queste considerazioni valgono anche rispetto ad H considerato come sottogruppo del gruppo ampliato $\overline{G}$. Cioè: *Se H è sottogruppo invariante, non solo di G, ma anche di* $\overline{G}$, *e se R è la riflessione mediante la quale si è ottenuto l'ampliamento, C è simmetrico, a meno di mutamenti leciti, rispetto al cerchio di simmetria di R.* È chiaro che, reciprocamente, *se H è sottogruppo invariante di G, e C è, o può rendersi con mutamenti leciti, simmetrico rispetto al cerchio di simmetria di R, H è sottogruppo invariante di* $\overline{G}$.

tiamo da una figura ottenuta da C mediante mutamenti leciti, otteniamo ancora la stessa superficie chiusa di prima. Quindi, mentre la disposizione dei bitriangoli nel campo fondamentale è soggetta a molta arbitrarietà, questa cessa del tutto quando dal campo fondamentale si passa alla superficie chiusa, sicchè rispetto a questa non v'ha più luogo a parlare di mutamenti leciti. Pertanto può dirsi che: *Se H è un sottogruppo invariante d'un gruppo G, la superficie chiusa ottenuta dal campo fondamentale di H è trasformata in sè stessa da ogni sostituzione di G.* Il numero delle diverse trasformazioni della superficie in sè stessa è evidentemente eguale al numero s dei bitriangoli che essa contiene, ossia all'indice del sottogruppo, giacchè si può trasformare il bitriangolo 1 in ciascuno degli s bitriangoli, compreso sè stesso, e d'altra parte, fissato il bitriangolo in cui 1 si trasforma, è individuata la trasformazione.

Diciamo nodi di *1ª, 2ª, 3ª specie* i nodi della rete in cui cadono rispettivamente i vertici degli angoli di ampiezza $\frac{\pi}{\nu_1}$, $\frac{\pi}{\nu_2}$, $\frac{\pi}{\nu_3}$. Poichè le trasformazioni della superficie in sè stessa mutano gli uni negli altri i nodi della stessa specie, ne segue che: *La superficie corrispondente ad un sottogruppo invariante ha la proprietà che intorno a ciascun suo nodo della stessa specie sta un egual numero di bitriangoli.*

Questa proprietà si esprime brevemente dicendo che la superficie è *regolare.*

84. Riprendiamo la tabella (1) dell'art. 82, e ricordiamo che gli s bitriangoli che compongono il campo C hanno per simboli s sostituzioni appartenenti rispettivamente alle s linee di quella tabella. Possiamo quindi assegnare agli s bitriangoli rispettivamente i simboli:

$$(1) \qquad 1, \quad Q_1, \quad Q_2, \ldots, Q_{s-1},$$

a meno di sostituzioni di H, intendendo con ciò che il vero simbolo del bitriangolo, a cui abbiamo assegnato il simbolo Q_i può non essere Q_i, ma il prodotto di Q_i per una sostituzione di H. Se trasformiamo poi il campo C in una superficie chiusa nel modo già detto, ed imaginiamo di sovrapporre a questa superficie tutti i campi omologhi a C in cui si divide la rete, facendo coincidere i bitriangoli omologhi *, il bitriangolo Q_i rappresenterà da sè solo tutti i bitriangoli aventi i simboli contenuti nella linea $(i+1)$-esima della tabella. Dopo ciò i simboli (1) possono rappresentare s trasformazioni in sè stessa della superficie, essendo Q_i il simbolo della trasformazione prodotta da una qualunque delle sostituzioni $Q_i P_h$ $(h = 0, 1,$

* Non bisogna dimenticare che noi ammettiamo di potere deformare in qualunque modo, purchè con continuità, le nostre figure.

2, ...), trasformazione che è indipendente dall'indice h.

Queste s trasformazioni formano un gruppo, quando H è un sottogruppo invariante.

Infatti, poichè in questo caso, qualunque sieno gli indici α, β, si trova sempre un terzo indice β' tale, che:

$$Q_\alpha^{-1} P_\beta Q_\alpha = P_{\beta'},$$

ossia:

$$P_\beta Q_\alpha = Q_\alpha P_{\beta'},$$

può scriversi:

$$Q_i P_h Q_j P_k = Q_i Q_j P_{h'} P_k;$$

ora $Q_i Q_j$ è una certa sostituzione di G, quindi figura nella tabella (1) dell'art. 82, cioè ha la forma $Q_l P_m$, sicchè:

$$Q_i P_h Q_j P_k = Q_l P_m P_{h'} P_k,$$

e $P_m P_{h'} P_k$ è una certa sostituzione P_r del sottogruppo H, onde:

$$Q_i P_h Q_j P_k = Q_l P_r,$$

dove l dipende soltanto da i e da j. Noi scriveremo questo simbolicamente così:

$$Q_i Q_j = Q_l,$$

formola che ha un significato reale immediato, se per Q_i s'intende, non già la sostituzione così denotata, ma la corrispondente trasformazione della superficie chiusa in sè stessa.

Il gruppo G' delle trasformazioni della superficie in sè stessa è meriedricamente isomorfo al grup-

po G, e il grado di meriedria è l'ordine del sottogruppo H quando questo è finito. All'identità in G' corrisponde in G il sottogruppo H; ad un sottogruppo di G' corrisponde un sottogruppo di G contenente H. E poichè lo studio di G' è sempre più facile di quello di G, l'aver ridotto la ricerca dei sottogruppi di G a quella dei sottogruppi di G' costituisce un reale vantaggio.

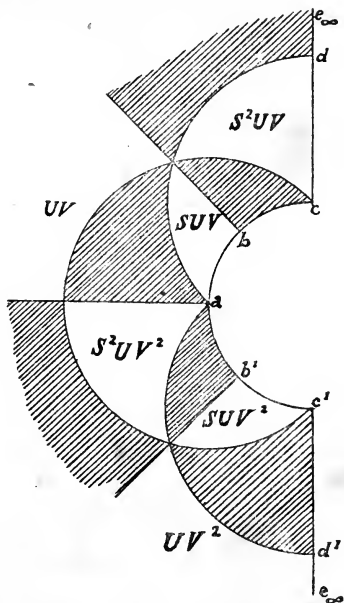
85. Ad illustrazione delle cose dette svilupperemo un esempio che ci sarà utile in seguito.

Si è veduto (art. 54) che il gruppo trirettangolo è un sottogruppo invariante del gruppo ottaedrico. Indichiamo questi due gruppi rispettivamente con H, G. Le sostituzioni del gruppo H sono:

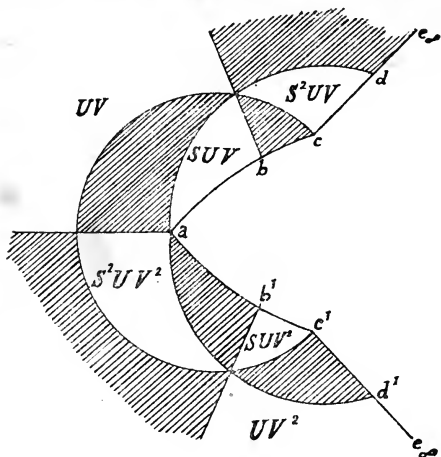
$$1, \quad V^2, \quad U, \quad UV^2.$$

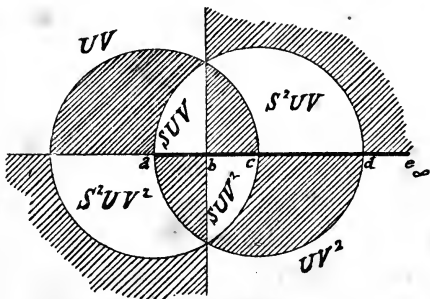
Partiamo da uno qualunque dei bitriangoli della rete ottaedrica, per es. da UV. I suoi contigui sono U, UV^2, S^2UV^2; i due primi sono omologhi fra loro rispetto ad H, quindi basta ritenere UV^2 e S^2UV^2. I contigui di questi diversi da UV sono UV^3, S^2UV^3, SUV, SUV^2; UV^3 è omologo ad UV, quindi riteniamo gli altri tre. Otteniamo così un campo fondamentale di H composto dei 6 bitriangoli seguenti:

$$(1) \quad UV, \quad UV^2, \quad S^2UV^2, \quad S^2UV^3, \quad SUV, \quad SUV^2.$$

Se alla metà tratteggiata di UV^2 e alla metà bianca di S^2UV^3 sostituiamo la metà tratteggiata di U e la metà bianca di S^2UV ad esse rispettivamente omologhe rispetto ad H, otteniamo il campo fondamentale disegnato nella figura 21. Sono

(*Fig.* 21)

lati omologhi del suo contorno ab, ab'; bc, $b'c'$; cd, $c'd'$; de, $d'e$. Deformando la rete in modo da portare a coincidere i lati omologhi come è indicato nella fig. 22, essa può ridursi alla forma della

fig. 23, la quale, come è facile vedere, rappresenta una rete diedrica di 12 triangoli ($m = 3$) proiettata

(Fig. 22)

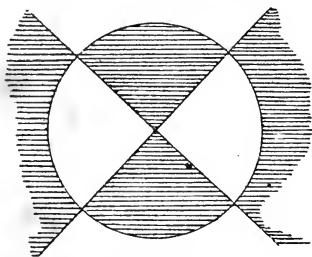
stereograficamente da uno dei nodi posti sull'equatore. Risulta da ciò che, se formiamo la tabella

(Fig. 23)

(1) dell'art. 82, e scegliamo un elemento di ciascuna linea, i 6 elementi devono formare un gruppo diedrico a meno di sostituzioni di H. Ciò si verifica senza difficoltà. La tabella è nel caso attuale, e tenuto conto delle relazioni stabilite nella nota all'art. 64:

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & V^2 & U & UV^2 \\ V & V^3 & UV^3 & UV \\ S & SV^2 & SU & SUV^2 \\ SV & SV^3 & SUV^3 & SUV \\ S^2 & S^2V^2 & S^2U & S^2UV^2 \\ S^2V & S^2V^3 & S^2UV^3 & S^2UV. \end{array} \right.$$

Possiamo intanto osservare che le 6 sostituzioni (1) appartengono alle 6 diverse linee della tabella. Inoltre, tenuto conto che V^2 è omologo ad 1 rispetto ad H, si vede immediatamente che le 6 sostituzioni $1, S, S^2, V, SV, S^2V$ formano un gruppo diedrico a meno di sostituzioni di H.

Si può anche seguire il cammino inverso. Osservando che le 6 sostituzioni $1, S, S^2, V, SV, S^2V$ formano, a meno di sostituzioni di H, un gruppo diedrico, si può partire dalla rete che rappresenta questo gruppo (fig. 23), eseguire un taglio lungo la linea $abcde$ nella superficie in cui essa giace, e deformare questa, come è indicato nella fig. 22, sino a portarla alla forma della fig. 21, nella quale sono omologhe le parti del contorno

che rappresentano due lembi corrispondenti del taglio praticato nella superficie chiusa. Si vede senza difficoltà che la rete ottaedrica si divide in 4 parti omologhe rispetto ad H, e cioè quella disegnata nella figura 21, la sua simmetrica rispetto all'asse imaginario, e i due semicerchi in cui il cerchio di raggio 1 è diviso da quest'asse, e che queste quattro parti, considerate come bitriangoli e divise in triangoli mediante l'asse reale, ci dànno la rete del gruppo trirettangolo.

(Fig. 24) *

86. Vogliamo determinare il genere p della superficie chiusa corrispondente ad un sottogruppo d'indice s.

Per il *teorema d'*Eulero *generalizzato* ** (cfr. art. 52), se S, F, V è il numero degli spigoli, delle facce e dei vertici d'una superficie chiusa di genere p, si ha:

$$F + V = S + 2 - 2p.$$

* Le due rette della figura, che per inavvertenza furono disposte obliquamente, devono essere, l'una orizzontale, l'altra verticale.

** Ecco come può dimostrarsi questo teorema.

Sia e_h $(h \geq 3)$ il numero dei nodi in ognuno dei quali concorrono h spigoli; si ha:

$$V = \sum e_h,$$

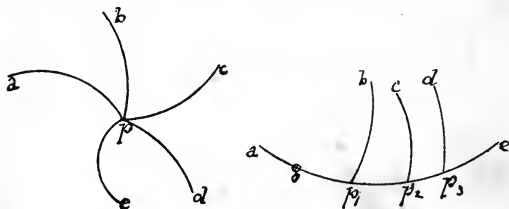
Diciamo $2m_1$, $2m_2$, ..., $2m_V$ il numero degli spigoli che concorrono nei singoli vertici; sarà:

$$S = \sum_{i=1}^{V} m_i .$$

---

inoltre, tenuto conto che ogni spigolo ha due estremi:

$$S = \frac{1}{2} \sum_h h e_h .$$

Se in un punto concorrono h spigoli, esso può considerarsi come ottenuto dalla coincidenza di $h - 2$ punti di concorso di spigoli 2 a 2; così nella figura p risulta dalla coincidenza dei punti p_1, p_2, p_3. Pratichiamo per es. nello spigolo ap un punto sezione o; le due parti di questo spi-

(*Fig. 25*)

golo e tutti i rimanenti potranno considerarsi come altrettanti tagli di 1ª specie. Degli estremi di questi tagli due cadono in o e $h - 2$ in p, sicchè il numero totale degli estremi è $2 + \sum (h-2)e_h$, e quello dei tagli $1 + \frac{1}{2} \sum (h-2)e_h$ ossia $S - V + 1$. Questi tagli scompongono la superficie in F parti, quindi si ha per un noto teorema:

$$F = (S - V + 1) - 2p + 1,$$

ossia:

$$F + V = S + 2 - 2p.$$

Inoltre il numero F delle facce è nel caso nostro $2s$, quindi:

$$2s + V = \sum_{i=1}^{V} m_i + 2 - 2p,$$

da cui:

$$p = 1 - s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{V} (m_i - 1).$$

Se il sottogruppo è invariante, la superficie è regolare, ed m_i ha lo stesso valore per tutti i nodi della stessa specie. Indichiamo rispettivamente con n_1, n_2, n_3 il valore di m_i per i nodi di 1^a, 2^a, 3^a specie; ed osserviamo che, se in un nodo di i-esima specie concorrono $2n_i$ spigoli, e quindi se esso appartiene ad n_i triangoli bianchi, il numero dei nodi di i-esima specie appartenenti alla superficie chiusa è $\frac{s}{n_i}$ *. La formola precedente diviene allora:

$$p = 1 - s + \sum_{i=1}^{3} \frac{s}{n_i} \frac{n_i - 1}{2}. \tag{1}$$

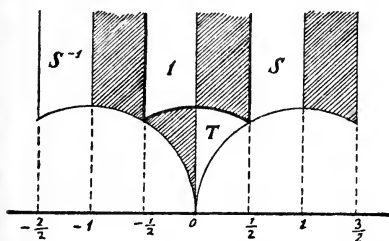
È da notarsi che n_1, n_2, n_3 sono necessariamente sottomultipli di s. Essi sono anche sottomultipli rispettivamente di ν_1, ν_2, ν_3.

---

* Infatti, mentre in generale un punto della superficie ammette s punti omologhi compreso sè stesso, un nodo di i-esima specie, appartenendo ad n_i triangoli bianchi, non ne ammette che $\frac{s}{n_i}$.

Il gruppo modulare e i suoi sottogruppi.

87. Il gruppo modulare ammette una definizione aritmetica semplicissima; però è più conforme ai nostri procedimenti assumere come dato il campo fondamentale relativo al gruppo stesso, e dedurne le proprietà aritmetiche del gruppo.

Consideriamo il triangolo formato dall'asse delle quantità imaginarie, dalla sua parallela alla distanza $-\frac{1}{2}$ e dal cerchio di raggio 1 col centro nell'origine, e contenuto interamente nel semipiano superiore; i suoi vertici sono i punti:

(Fig. 26)

$$i, \quad \rho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

e il punto all'infinito, le ampiezze degli angoli $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ e 0, sicchè si ha:

$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 3, \quad \nu_3 = \infty.$$

La rete generata per simmetria dal nostro triangolo appartiene dunque al tipo (c) dell'art. 76. Cerchiamo di determinare il suo cerchio di sim-

metria. I soli cerchi che tagliano ortogonalmente i due lati paralleli del triangolo sono le rette parallele all'asse delle quantità reali; fra queste la sola che taglia ortogonalmente il lato curvilineo è quella passante pel centro del cerchio di cui esso fa parte, cioè lo stesso asse reale. Dunque l'asse reale è il cerchio di simmetria della rete, e questa sta tutta nel semipiano superiore. I vertici degli angoli di ampiezza nulla (cioè i punti omologhi al punto all'infinito) stanno tutti sull'asse reale.

Noi assumeremo come campo fondamentale del gruppo da studiarsi il bitriangolo formato dal triangolo testè costruito e dal suo simmetrico rispetto all'asse imaginario. Le parti del suo contorno che si riguardano come appartenenti ad esso sono il lato rettilineo di sinistra e la metà di sinistra del lato circolare.

Consideriamo i 3 bitriangoli contigui. Essi si ottengono rispettivamente mediante una traslazione di $+1$ e di -1 e mediante un'inversione rispetto al cerchio di raggio 1 col centro nell'origine; le espressioni analitiche di queste sostituzioni sono:

$$(1) \quad S=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Può osservarsi che queste sostituzioni sono unitarie ed a coefficienti interi, sicchè il gruppo di cui esse sono le sostituzioni generatrici sarà pure formato di sostituzioni unitarie a coefficienti interi.

Noi vogliamo dimostrare che, reciprocamente, ogni sostituzione unitaria a coefficienti interi può esprimersi come prodotto di potenze delle sostituzioni (1).

Sia:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

una sostituzione, i cui elementi sieno numeri interi legati dalla relazione:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{2}$$

Poichè γ e δ non possono essere insieme nulli, sono possibili 3 casi, cioè:

$\gamma \neq 0, \quad \delta = 0; \quad \gamma = 0, \quad \delta \neq 0; \quad \gamma \neq 0, \quad \delta \neq 0.$

Sia dapprima $\gamma \neq 0$, $\delta = 0$. Allora, per la (2), $\beta\gamma = -1$, e quindi, indicando con ε l'unità positiva o negativa, $\beta = \varepsilon$, $\gamma = -\varepsilon$, sicchè:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

ossia l'espressione di P è:

$$z' = -\varepsilon\alpha - \frac{1}{z}.$$

Posto quindi:

$$-\frac{1}{z} = z_1,$$

si ha:

$$z' = z_1 - \varepsilon\alpha,$$

cioè:

$$P = TS^{-\varepsilon\alpha}.$$

Sia in secondo luogo $\gamma = 0$, $\delta \neq 0$. Allora $\alpha\delta = 1$, quindi $\alpha = \delta = \varepsilon$, e:

$$P = \begin{pmatrix} \varepsilon & \beta \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

cioè:

$$z' = z + \varepsilon\beta,$$

da cui:

$$P = S^{\varepsilon\beta}.$$

Sia infine $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$. Dalla (2) segue che γ e δ sono primi tra loro. Si sviluppi la frazione irriducibile $\frac{\delta}{\gamma}$ in frazione continua:

$$\frac{\delta}{\gamma} = k_1 + \frac{1}{k_2 + \cdots} + \frac{1}{k_n}$$

e si indichino con $\frac{M_i}{N_i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ i quozienti approssimati, sicchè:

$$\frac{M_0}{N_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{M_1}{N_1} = \frac{k_1}{1}, \quad \frac{M_2}{N_2} = \frac{k_1 k_2 + 1}{k_2}, \ldots, \frac{M_n}{N_n} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Come è noto, si ha:

$$M_i N_{i-1} - M_{i-1} N_i = (-1)^i,$$

$$M_{i+1} = M_i k_{i+1} + M_{i-1}, \quad N_{i+1} = N_i k_{i+1} + N_{i-1}.$$

Posto:

$$z_1 = z + k_1 = S^{k_1}(z),$$

$$z_2 = -\frac{1}{z_1} = T(z_1) = S^{k_1} T(z),$$

$$z_3 = z_2 - k_2 = S^{-k_2}(z_2) = S^{k_1} T S^{-k_2}(z),$$

$$z_4 = -\frac{1}{z_3} = T(z_3) = S^{k_1} T S^{-k_2} T(z),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

può dimostrarsi, per induzione completa, che la formola:

$$(3) \qquad z_{2i} = (-1)^i \frac{N_{i-1} z + M_{i-1}}{N_i z + M_i},$$

facilmente verificabile per $i = 1$, sussiste per ogni altro valore di i. Supponendola vera per un certo i, si ha infatti:

$$z_{2i+1} = z_{2i} + (-1)^i k_{i+1}$$
$$= (-1)^i \frac{(N_i k_{i+1} + N_{i-1}) z + (M_i k_{i+1} + M_{i-1})}{N_i z + M_i}$$
$$= (-1)^i \frac{N_{i+1} z + M_{i+1}}{N_i z + M_i},$$

e quindi:

$$z_{2i+2} = -\frac{1}{z_{2i+1}} = (-1)^{i+1} \frac{N_i z + M_i}{N_{i+1} z + M_{i+1}},$$

che è la stessa (3) per $i + 1$. Si ha dunque:

$$(4) \qquad \begin{cases} z_{2n} = -(-1)^n \dfrac{N_{n-1} z + M_{n-1}}{N_n z + M_n} \\ \qquad = (-1)^n \dfrac{N_{n-1} z + M_{n-1}}{\gamma z + \delta}; \end{cases}$$

inoltre:

$$M_n N_{n-1} - M_{n-1} N_n = \delta N_{n-1} - \gamma M_{n-1} = (-1)^n,$$

ossia:

$$\delta (-1)^n N_{n-1} - \gamma (-1)^n M_{n-1} = 1,$$

che insieme alla (2) ci dà:

$$\delta[\alpha-(-1)^n N_{n-1}]=\gamma[\beta-(-1)^n M_{n-1}].$$

Poichè γ e δ sono primi tra loro, segue di qui, indicando con λ un numero intero:

$$\alpha-(-1)^n N_{n-1}=\lambda\gamma, \quad \beta-(-1)^n M_{n-1}=\lambda\delta,$$

sicchè la (4) diviene:

$$z_{2n}=\frac{(\alpha-\lambda\gamma)z+(\beta-\lambda\delta)}{\gamma z+\delta}=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}-\lambda.$$

La P può scriversi quindi:

$$z'=z_{2n}+\lambda,$$

e si ha finalmente:

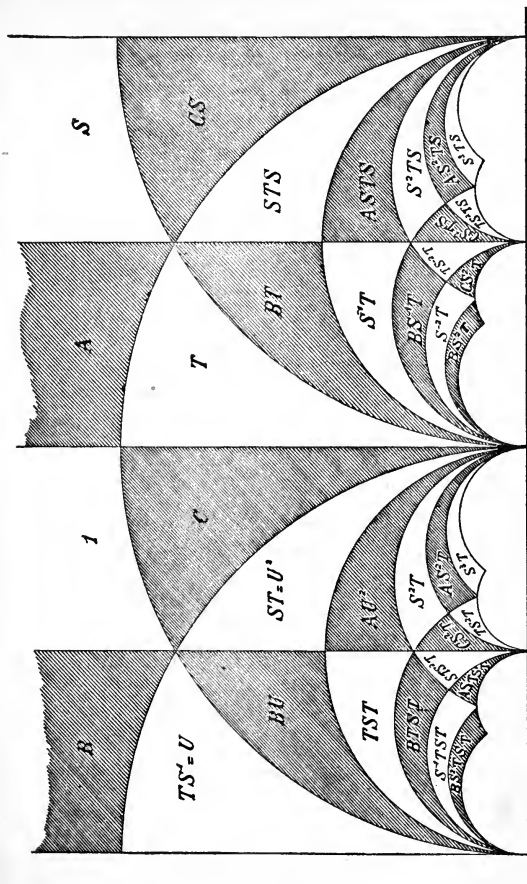
$$P=S^{k_1}TS^{-k_2}T\ \ldots\ S^{(-1)^{n-1}k_n}TS^{\lambda},$$

che dimostra l'asserto.

Dunque *il gruppo il cui campo fondamentale è quello da noi assunto consta di tutte le sostituzioni unitarie ad elementi interi.* Esso dicesi, per una ragione che vedremo più innanzi, *gruppo modulare,* e si suole indicare con Γ.

Si possono considerare come sostituzioni generatrici del gruppo le S, T, purchè si intenda con ciò che ogni sostituzione del gruppo è esprimibile come prodotto di potenze *positive, nulle o negative* di esse.

Ciò che si è detto riguardo ai gruppi finiti permette di assegnare facilmente il simbolo corrispondente a ciascun triangolo della rete. Senza arrestarci su questo, osserveremo soltanto che, se P

è il simbolo d'un triangolo, quelli dei tre adiacenti

(Fig. 27).

sono rispettivamente SP, $S^{-1}P$, TP.

88. *Nessuna sostituzione del gruppo modulare può essere lossodromica* (art. 24).

Se supponiamo di aver dato ai coefficienti segno tale, che sia:

$$\alpha + \delta \geq 0,$$

una sostituzione del gruppo modulare sarà ellittica, se:

$$\alpha + \delta = 0 \quad \text{o} \quad \alpha + \delta = 1,$$

parabolica, se:

$$\alpha + \delta = 2,$$

iperbolica, se:

$$\alpha + \delta > 2.$$

Le sostituzioni per cui $\gamma = 0$ sono tutte paraboliche; infatti si ha in questo caso $\alpha\delta = 1$, quindi $\alpha = \delta = \pm 1$, e $\alpha + \delta = \pm 2$.

Possiamo domandarci se il gruppo modulare contenga sostituzioni di ordine finito. Tali sostituzioni non possono cercarsi se non fra quelle ellittiche (art. 33).

Sia dapprima $\alpha + \delta = 0$. Ne segue (art. 23):

$$\theta = \left[\frac{\alpha + \delta - \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2}\right]^2 = -1 = e^{\pi i},$$

sicchè la sostituzione è d'ordine 2. I suoi poli sono:

$$(1) \quad \left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = \frac{\alpha - \delta \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2\gamma} = \frac{\alpha \pm i}{\gamma}.$$

Sia ora $\alpha + \delta = 1$. Ne segue:

$$\theta = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \rho^2,$$

sicchè la sostituzione è d'ordine 3. I suoi poli sono:

$$(2) \qquad \left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\alpha + \rho}{\gamma}, \\ \dfrac{\alpha + \rho^2}{\gamma}. \end{matrix}\right.$$

Dunque: *Le sole sostituzioni d'ordine finito contenute nel gruppo modulare sono, oltre l'identità, quelle per cui* $\alpha + \delta = 0$, *che sono d'ordine* 2, *e quelle per cui* $\alpha + \delta = \pm 1$, *che sono d'ordine* 3.

Per es. la sostituzione:

$$U = TS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è d'ordine 3, perchè $\alpha + \delta = 1$. La sua inversa, cioè $ST = U^2$, è pure d'ordine 3 (art. 5), sicchè si ha fra S e T la relazione semplice:

$$(3) \qquad STSTST = 1.$$

I triangoli U, U^2 stanno, insieme al triangolo 1, intorno al punto ρ.

89. Le formole (1), (2) dànno luogo a qualche osservazione notevole.

Dei due punti (1) uno ed uno solo sta nel semipiano superiore; per es., supposto $\gamma > 0$, ciò che può sempre ammettersi, sta nel semipiano superiore il punto $\dfrac{\alpha + i}{\gamma}$.

Vediamo quali tra i punti $\frac{\alpha + i}{\gamma}$ stieno nel campo fondamentale. Poichè tutti i punti di questo campo hanno ordinata $\geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, dev'essere $\gamma \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, e quindi l'unica soluzione è $\gamma = 1$, sicchè $\frac{\alpha + i}{\gamma} = \alpha + i$. D'altra parte i soli punti del campo fondamentale la cui ascissa è un numero intero sono quelli di ascissa nulla, sicchè $\alpha = 0$. Dunque il solo punto tra quelli considerati che sia contenuto nel campo fondamentale è il punto i, e quindi: *I poli delle sostituzioni d'ordine* 2 *del gruppo modulare sono punti omologhi al punto i.*

Reciprocamente, se p è un punto omologo di i, e se Q, Q' sono i due triangoli bianchi che stanno intorno ad esso, p è polo d'una sostituzione ellittica d'ordine 2 mediante la quale si passa da Q a Q', cioè della sostituzione $Q^{-1} Q'$. Cioè: *Ogni punto omologo di i è polo d'una sostituzione d'ordine* 2.

Analogamente, se si considera che ρ e ρ^2 sono quantità coniugate, si vede che uno ed uno solo dei due punti (2) appartiene al semipiano superiore; tale è il punto $\frac{\alpha + \rho}{\gamma}$, se $\gamma > 0$.

Cerchiamo quali tra i punti $\frac{\alpha + \rho}{\gamma} = \frac{(2\alpha - 1) + i\sqrt{3}}{2\gamma}$

stieno nel campo fondamentale. Dev'essere anzitutto $\frac{\sqrt{3}}{2\gamma} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi $\gamma \leqq 1$; la sola soluzione possibile è $\gamma = 1$, e si ha:

$$\frac{\alpha + \rho}{\gamma} = \frac{2\alpha - 1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

D'altra parte, detta x l'ascissa d'un punto del campo fondamentale, si ha:

$$-\frac{1}{2} \leqq x < \frac{1}{2}.$$

Dunque:

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{2\alpha - 1}{2} < \frac{1}{2},$$

da cui $0 \leqq \alpha < 1$, e quindi $\alpha = 0$; sicchè:

$$\frac{\alpha + \rho}{\gamma} = \rho.$$

I poli delle sostituzioni d'ordine 3 del gruppo modulare sono punti omologhi al punto ρ.

Si può dimostrare come prima che, reciprocamente, *tutti i punti omologhi di* ρ *sono poli d'una sostituzione d'ordine tre.*

90. Ciò premesso, esaminiamo sotto quali condizioni due sostituzioni ellittiche del gruppo modulare sieno equivalenti.

Sia dapprima P una sostituzione ellittica di ordine 2. Il suo polo posto nel semipiano superiore sarà un punto p omologo ad i, cioè un nodo della rete intorno al quale stanno 4 triangoli.

Sia Q il simbolo di uno dei due triangoli bianchi che stanno intorno a p; poichè l'altro triangolo bianco si ottiene da esso con una rotazione di π intorno a p, polo di P, sarà QP il suo simbolo. Ora p è il trasformato del punto i mediante la sostituzione Q; e quindi, considerando che una rotazione di π intorno ad i è rappresentata da T, il prodotto TQ rappresenta (art. 66) la stessa rotazione del prodotto QP:

$$TQ = QP.$$

Ne segue:

$$P = Q^{-1}TQ.$$

Cioè: *Ogni sostituzione d'ordine 2 del gruppo modulare è equivalente alla sostituzione T.* — E per conseguenza (art. 12): *Tutte le sostituzioni d'ordine 2 del gruppo modulare sono tra loro equivalenti.*

Sia ora P una sostituzione ellittica d'ordine 3. Il suo polo posto nel semipiano superiore sarà un punto p omologo a ρ, cioè un nodo della rete intorno al quale stanno 6 triangoli. Sia Q il simbolo di uno dei tre triangoli bianchi che stanno intorno a p; gli altri due triangoli bianchi saranno QP e QP^2. D'altra parte, poichè p è il trasformato di ρ mediante Q, i prodotti UQ e U^2Q rappresentano le stesse rotazioni dei prodotti QP, QP^2, cioè sussiste l'una o l'altra delle relazioni:

$$UQ = QP, \quad U^2Q = QP,$$

e quindi:

$$P = Q^{-1} U Q \quad \text{o} \quad P = Q^{-1} U^2 Q.$$

Cioè: *Ogni sostituzione d'ordine 3 del gruppo modulare è equivalente o ad U o ad U^2.*

91. Vogliamo trattare il problema dell'equivalenza anche per le sostituzioni paraboliche.

Poichè per una sostituzione parabolica $\alpha + \delta = 2$, ogni sostituzione parabolica del gruppo modulare potrà scriversi:

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \sigma & \beta \\ \gamma & 1 - \sigma \end{pmatrix},$$

dove β, γ, σ sono numeri interi positivi, nulli o negativi legati dalla relazione:

$$(1) \qquad \beta\gamma + \sigma^2 = 0.$$

Sia λ il massimo comun divisore di β, γ, σ, preso collo stesso segno di β, e poniamo:

$$\beta = \lambda\beta', \quad \gamma = \lambda\gamma', \quad \sigma = \lambda\sigma';$$

sarà $\beta' > 0$. Sia inoltre μ il massimo comun divisore di γ', σ', e poniamo:

$$\gamma' = \mu\gamma'', \quad \sigma' = \mu\nu;$$

μ sarà primo con β'. La relazione (1) diviene, sopprimendo il fattore $\lambda^2\mu$:

$$\beta'\gamma'' + \mu\nu^2 = 0;$$

considerando che $\beta' \geq 0$, e che μ è primo con β' e γ'' con ν, se ne deduce:

$$\beta' = \nu^2, \quad \gamma'' = -\mu,$$

e quindi:

$$\beta = \lambda\nu^2, \quad \gamma = -\lambda\mu^2, \quad \sigma = \lambda\mu\nu,$$

sicchè la sostituzione prende la forma:

$$(2) \qquad P = \begin{pmatrix} 1 + \lambda\mu\nu & \lambda\nu^2 \\ -\lambda\mu^2 & 1 - \lambda\mu\nu \end{pmatrix}.$$

Il suo polo è $-\frac{\nu}{\mu}$.

Abbiamo già osservato che μ è primo con β'; poichè $\beta' = \nu^2$, μ è primo con ν. Possiamo quindi trovare due numeri μ', ν' tali che sia:

$$\mu'\nu - \nu'\mu = 1;$$

posto allora:

$$\begin{pmatrix} \mu' & \nu' \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = Q,$$

si trova facilmente:

$$QS^\lambda Q^{-1} = P.$$

Dicendo *ampiezza* della sostituzione il numero λ, che è il massimo comune divisore di $\alpha - 1$, β, γ preso col segno che ha β, può dirsi che: *Tutte le sostituzioni paraboliche di ampiezza λ sono equivalenti ad S^λ e quindi fra loro.*

Dati il polo e l'ampiezza d'una sostituzione modulare parabolica, la sostituzione è determinata. Infatti, conoscendo il polo $-\frac{\nu}{\mu}$, e ricordando che μ e ν sono primi tra loro, si hanno immediatamente questi due numeri; dato anche λ, la (2) ci fornisce la sostituzione cercata.

L'ampiezza ha un significato geometrico molto semplice.

Consideriamo anzitutto la sostituzione S^λ, che è di ampiezza λ. Per passare da un punto al suo omologo rispetto ad S^λ, bisogna eseguire una traslazione di grandezza λ nel senso dell'asse reale, cioè quel movimento che muta uno dei bitriangoli aventi un vertice nel punto ∞ in quello che occupa il λ-esimo posto dopo di esso. Ora, se:

$$Q S^\lambda Q^{-1} = P,$$

P è una sostituzione parabolica avente il polo in un certo punto razionale c dell'asse reale, e avente ampiezza λ. Al fascio di bitriangoli intorno al punto all'infinito corrisponde, nel caso della sostituzione P, il fascio di bitriangoli intorno al punto c; e quindi, per passare da un punto al suo omologo rispetto a P, bisogna eseguire quella deformazione del piano che muta uno dei triangoli aventi un vertice in c in quello che occupa il λ-esimo posto dopo di esso.

92. Siccome la rete modulare è simmetrica rispetto all'asse delle quantità imaginarie, si potrà ottenere il gruppo ampliato $\overline{\Gamma}$ combinando Γ con una riflessione rispetto a quest'asse. L'espressione analitica di tale riflessione, che indicheremo con A, è:

$$z' = -\bar{z}.$$

Il simbolo A è quello che spetta al triangolo tratteggiato simmetrico del triangolo bianco 1 rispetto all'asse delle quantità imaginarie. È chia-

ro che i simboli dei triangoli tratteggiati simmetrici ad 1 rispetto agli altri suoi due lati sono AS^{-1} e AT; le corrispondenti espressioni analitiche sono:

$$z' = -\bar{z} - 1, \quad z' = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Noi porremo:

$$AS^{-1} = B, \quad AT = C, \tag{1}$$

sicchè si avrà per le tre operazioni generatrici del gruppo $\overline{\Gamma}$:

$$A(z) = -\bar{z}, \quad B(z) = -\bar{z} - 1, \quad C(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Poichè le A, B, C sono riflessioni, si ha:

$$A^2 = B^2 = C^2 = 1. \tag{2}$$

Dopo ciò dalla prima delle (1) segue moltiplicando a sinistra per B e a destra per S:

$$BA = S. \tag{3}$$

Moltiplicando invece a sinistra per A si ha:

$$AB = S^{-1}. \tag{4}$$

Dalla seconda delle (1) segue poi:

$$CA = T, \tag{5}$$

e di qui, osservando che l'inversa di CA è AC e l'inversa di T è la stessa T:

$$AC = T. \tag{6}$$

Infine, moltiplicando la prima delle (1) a sinistra per C, e tenendo conto della (5) e della definizione di U, si ha:

$$CB = U, \tag{7}$$

da cui:

$$BC = U^{-1} = U^2. \tag{8}$$

93. Dobbiamo ora studiare un sottogruppo particolarmente importante del gruppo Γ, che, per una ragione che vedremo più innanzi, vogliamo designare con Γ_6.

Consideriamo le sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ del gruppo modulare, in cui β e γ sono pari. È facile dimostrare che esse formano un gruppo. Posto infatti:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix},$$

si vede dalla (1) dell'art. 20 che, se β, γ, β', γ' sono pari, lo sono pure β'', γ''.

Il sottogruppo formato da quelle sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ del gruppo modulare, in cui β e γ sono pari, è appunto quello che si indica con Γ_6.

In tutte le sostituzioni di Γ_6 *gli elementi* α *e* δ *sono dispari.*

Infatti, essendo β, γ pari e:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{1}$$

il prodotto $\alpha\delta$ deve essere dispari, e quindi lo sono ambidue i suoi fattori.

Il gruppo Γ_6 *non contiene sostituzioni ellittiche.*

Infatti non può essere anzitutto $\alpha + \delta = \pm 1$, dovendo α e δ essere entrambi dispari. Se $\alpha + \delta = 0$,

si ha dalla (1):

$$\alpha^2 \equiv -1 \pmod 4,$$

che è impossibile.

Di qui segue (art. 87) che *i nodi della rete corrispondente a* Γ_6 *stanno tutti sull'asse reale.*

Può dimostrarsi che Γ_6 *è un sottogruppo invariante di* Γ.

Sia:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

una sostituzione qualunque di Γ_6, e $Q = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ una sostituzione qualunque di Γ. Posto:

$$Q^{-1} P Q = \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix},$$

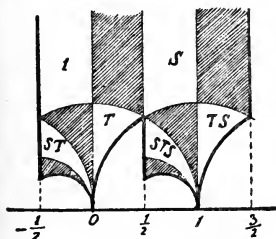
si ha (art. 26):

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'' = \alpha\alpha'\delta' - \beta\alpha'\gamma' + \gamma\beta'\delta' - \delta\beta'\gamma' \\ \beta'' = -\alpha\alpha'\beta' + \beta\alpha'^2 - \gamma\beta'^2 + \delta\alpha'\beta' \\ \gamma'' = \alpha\gamma'\delta' - \beta\gamma'^2 + \gamma\delta'^2 - \delta\gamma'\delta' \\ \delta'' = -\alpha\beta'\gamma' + \beta\alpha'\gamma' - \gamma\beta'\delta' + \delta\alpha'\delta'. \end{array} \right.$$

Ora, considerando che β, γ e $\alpha - \delta$ sono pari, si vede che sono anche pari β'' e γ'', sicchè $Q^{-1} PQ$ appartiene a Γ_6.

94. Procediamo alla determinazione del campo fondamentale di Γ_6 colle norme indicate nell'art. 82.

Dei bitriangoli S, S^{-1}, T adiacenti al bitrian-

golo 1, nessuno è omologo ad esso rispetto a Γ_6; però S e S^{-1} sono tra loro omologhi, giacchè $S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene evidentemente a Γ_6. Riterremo quindi come appartenenti al campo fondamentale i bitriangoli 1, S, T. I nuovi bitriangoli adiacenti rispettivamente ad S e a T sono S^2, TS, ST, $S^{-1}T$; di questi il primo è omologo ad 1 e l'ultimo ad ST, sicchè riterremo soltanto TS ed ST. I nuovi bitriangoli adiacenti a questi sono STS, $S^{-1}TS$, S^2T, TST; di essi il secondo ed il quarto sono omologhi al primo * e il terzo è omologo a T, sicchè è da ritenersi soltanto STS. Dei bitriangoli adiacenti a questo uno solo è nuovo, cioè S^2TS, ma esso è omologo a TS. Dunque il campo fondamentale di Γ_6 consta dei sei bitriangoli:

(Fig. 28)

$$(1) \qquad 1,\ S,\ T,\ TS,\ ST,\ STS;$$

il numero di questi bitriangoli giustifica la notazione Γ_6 da noi adottata, e 6 è l'indice del sottogruppo.

---

* Infatti dalla (3) dell'art. 88 segue:

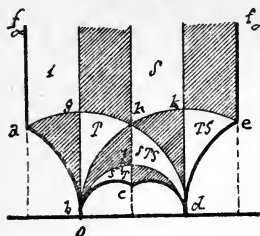
$$TST = S^{-1}TS^{-1} = S^{-2}.STS.S^{-2},$$

ed S^{-2} appartiene a Γ_6.

Togliendo il bitriangolo ST ed aggiungendo l'omologo $S^{-1}T$, si ottiene un campo fondamentale formato dei 6 bitriangoli:

(Fig. 29)

(1) $1, S, T, TS, S^{-1}T, STS$,

che è simmetrico rispetto alla retta $x = \frac{1}{2}$.

Indichiamo le 6 sostituzioni (1) con Q_i ($i = 0, 1, \ldots, 5$), ponendo:

$$Q_0 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z' = z,$$

$$Q_1 = TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z' = \frac{z-1}{z},$$

$$Q_2 = S^{-1}T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad z' = -\frac{1}{z-1},$$

$$Q_3 = S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z' = z + 1,$$

$$Q_4 = T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z' = -\frac{1}{z},$$

$$Q_5 = STS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad z' = \frac{z}{z+1}.$$

Si trovano immediatamente le seguenti relazioni:

$$Q_2 = Q_1^2, \quad Q_4 = Q_1 Q_3 S^{-2},$$
$$Q_5 = S^2 Q_1^2 Q_3, \quad Q_1^3 = 1, \quad Q_3^2 = S^2,$$

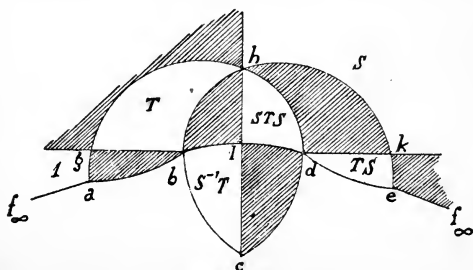
sicchè, denotando con $\backsimeq$ *l'eguaglianza a meno di sostituzioni di* Γ_6, può scriversi:

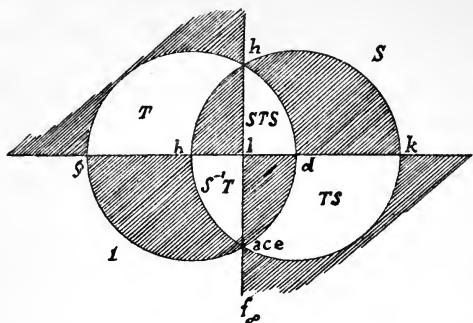
$$Q_2 \backsimeq Q_1^2,\quad Q_4 \backsimeq Q_1 Q_3,\quad Q_5 \backsimeq Q_1^2 Q_3,\quad Q_1^3 \backsimeq 1,\quad Q_3^2 \backsimeq 1,$$

e può dirsi che il gruppo delle trasformazioni in sè stessa della superficie chiusa a cui si riduce il campo fondamentale è il seguente:

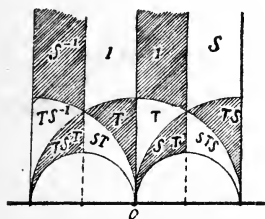
$$1,\quad Q_1,\quad Q_1^2,\quad Q_3,\quad Q_1 Q_3,\quad Q_1^2 Q_3.$$

Questo (cfr. art. 85) è evidentemente un gruppo diedrico ($m = 3$).

Allo stesso risultato si giunge per via intuitiva, facendo vedere come il campo fondamentale Γ_6 si possa ridurre per deformazione continua ad una sfera portante una rete diedrica di 12 triangoli ($m = 3$). Le figure 30 e 31 rappresentano una fase intermedia e la fase finale di questa deformazione. La fig. 31, che è identica alla fig. 23, non è altro che una rete diedrica proiettata ste-

(Fig. 30)

reograficamente da uno dei nodi posti sull'equatore.

(*Fig. 31*)

95. Nella fig. 29 eseguiamo i seguenti mutamenti leciti :

Ai triangoli bianchi TS, $S^{-1}T$ sostituiamo gli omologhi, pure bianchi, TS^{-1}, ST.

(*Fig. 32*)

Ai triangoli tratteggiati S, STS sostituiamo gli omologhi, pure tratteggiati, S^{-1}, TST.

Si ottiene così un altro campo fondamentale per il gruppo Γ_6, il quale è simmetrico rispetto all'asse imaginario *.

---

* Questo campo differisce dai due precedenti (figg. 28, 29) in ciò, che esso *non* consta di sei bitriangoli.

Da quest'ultima circostanza si deduce che il gruppo Γ_6 è ampliabile mediante la riflessione A. Come campo fondamentale del gruppo ampliato $\overline{\Gamma}_6$ può prendersi una delle due metà in cui il campo fondamentale di Γ_6 è diviso dall'asse imaginario, per es. la metà di sinistra. Questo campo non è altro che un triangolo a lati rettilinei o circolari avente tutti e tre gli angoli nulli e i vertici nei punti $0, -1, \infty$. Quindi il gruppo Γ_6 ha per imagine una rete triangolare per cui $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \infty$, e che appartiene perciò al tipo (c) dell'art. 76. Il suo cerchio di simmetria è l'asse reale.

Le operazioni generatrici di $\overline{\Gamma}_6$ sono le 3 riflessioni rispetto ai tre lati del triangolo $0, -1, \infty$. Le riflessioni rispetto ai due lati rettilinei si trovano immediatamente; esse sono:

$$z' = A'(z) = -\overline{z}, \quad z' = B'(z) = -\overline{z} - 2.$$

Per la terza ricorriamo alle formole dell'art. 40. Il cerchio di simmetria ha il centro nel punto $-\frac{1}{2}$ ed ha raggio $\frac{1}{2}$; quindi:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta\gamma}{\gamma^2} = \frac{1}{4}.$$

Posto $\gamma = -2$, si ha $\alpha = +1$, quindi $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, e dalla seconda $\beta = 0$; infine, dovendo essere $\delta = -\overline{\alpha}$, si ha $\delta = -1$. Sicchè la riflessione cercata è:

$$z' = C'(z) = \frac{\overline{z}}{-2\overline{z} - 1}.$$

Siccome poi ogni sostituzione di Γ_6 è il prodotto d'un numero pari di fattori A', B', C', e siccome:

$$A'^2 = B'^2 = C'^2 = 1,$$

così possono prendersi come sostituzioni generatrici di Γ_6 i 3 prodotti:

$$B'A' = S', \quad C'A' = T', \quad C'B' = U'.$$

Si trova:

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S^2, \quad z' = z + 2,$$

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = T S^{-2} T, \quad z' = \frac{z}{2z + 1},$$

$$U' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = T' S'^{-1}, \quad z' = \frac{3z + 2}{-2z - 1}.$$

Dal fatto che il campo fondamentale di Γ_6 è simmetrico rispetto all'asse imaginario si trae anche un'altra conseguenza (art. 83, nota), e cioè, che Γ_6 *è sottogruppo invariante di* $\overline{\Gamma}$.

96. Tornando al gruppo diedrico dell'art. 94, che vogliamo designare con G_6, determineremo i suoi sottogruppi, e ad ognuno di questi corrisponderà un sottogruppo di Γ contenente Γ_6.

I sottogruppi di G_6 sono:

Un gruppo ciclico d'ordine 3:

$$1, \quad Q_1, \quad Q_1^2,$$

che diremo G_3, e che, essendo unico, è di necessità invariante.

Tre gruppi ciclici d'ordine 2 tra loro equivalenti:

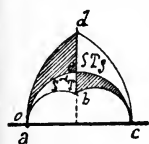
$$1, \quad Q_3; \quad 1, \quad Q_1 Q_3; \quad 1, \quad Q_1^2 Q_3.$$

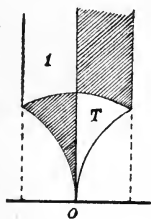
Corrispondentemente avremo in Γ un sottogruppo invariante Γ_2 d'indice $2 = \frac{6}{3}$, e tre sottogruppi equivalenti Γ_3, Γ_3', Γ_3'' d'indice $3 = \frac{6}{2}$.

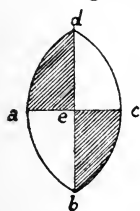
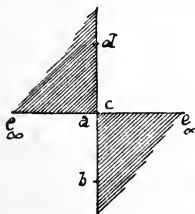
Costruiamo i loro campi fondamentali.

Il gruppo Γ_2 consta di tutte le sostituzioni di Γ eguali all'una o all'altra delle:

$$(1) \qquad 1, \quad TS, \quad S^{-1}T$$

a meno di sostituzioni di Γ_6. Il suo campo fondamentale consta quindi di due dei 6 bitriangoli che compongono il campo fondamentale di Γ_6, dei quali uno può scegliersi ad arbitrio, e il secondo dev'essere adiacente al primo, e inoltre è soggetto alla condizione che il suo simbolo non sia eguale a quello del primo a meno di sostituzioni (1), o, in altri termini, di non essere omologo al primo rispetto a Γ_2. Scegliamo come primo bitriangolo $S^{-1}T$ ossia Q_2, ed osserviamo che il bitriangolo adiacente $STS = Q_5$ non è omologo ad esso rispetto a Γ_2, giacchè nessuno dei prodotti delle (1) per STS è eguale ad $S^{-1}T$. Possiamo dunque prendere come campo fondamentale di Γ_2 l'insieme dei bitriangoli $S^{-1}T = Q_2$, $STS = Q_5$.

(Fig. 33).

Invece di questo, si può prendere il campo formato dai due bitriangoli $1 = Q_0$ e $T = Q_4$. Esso è simmetrico rispetto all'asse immaginario; ne segue (art. 83, nota) che Γ_2 *è sottogruppo invariante di* $\overline{\Gamma}$.

(*Fig. 34*).

Riprendiamo il campo sotto la forma della figura 33. Siccome $S^{-1}T$ e TS sono omologhi rispetto a Γ_2, e lo sono pure $S^{-1}T$ e il triangolo S^2TS adiacente a STS lungo bc, così i lati ad, cd sono omologhi e parimenti i lati ab, cb. Deformiamo il campo nel modo indicato dalla fig. 35, poi applichiamolo sopra una sfera, facendo in guisa, per fissare le idee, che b e d ne occupino due poli, bed, bad, bcd si dispongano secondo meridiani, aec secondo l'equatore. Indi, lasciando fisso il meridiano bed, distendiamo la nostra superficie sulla sfera sino a che essa la ricopra per intero, ciò che accadrà quando bad e bcd coincideranno.

(*Fig. 35*).

Avremo allora sulla sfera una rete che, proiettata stereograficamente dal punto e, ci darà la fig. 36.

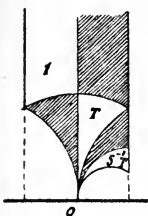
(*Fig. 36*).

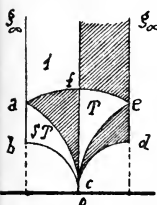
Procediamo analogamente pei gruppi Γ_3, Γ'_3, Γ''_3.

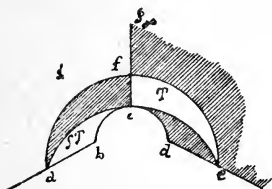
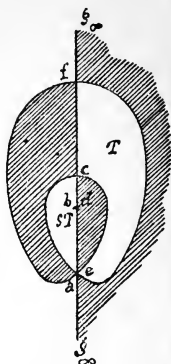
Il gruppo Γ_3 consta di tutte

le sostituzioni di Γ eguali all'una o all'altra delle:

$$(2) \qquad\qquad 1, \quad S$$

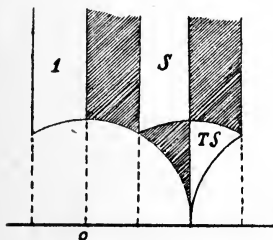
a meno di sostituzioni di Γ_6. Per formare il suo campo fondamentale prendiamo anzitutto il bitriangolo 1. Dei due ad esso adiacenti, S non si può prendere perchè omologo ad 1 rispetto a Γ_3; può prendersi invece T. Come terzo bitriangolo si può prendere $S^{-1}T$ che non è omologo nè ad 1 nè a T rispetto a Γ_3. Si ottiene così il campo rappresentato nella fig. 37. Esso può rendersi simmetrico rispetto all'asse imaginario (fig. 38) sostituendo al triangolo bianco $S^{-1}T$ il triangolo bianco $S\,T$ ad esso omologo rispetto a Γ_6 e quindi anche rispetto a Γ_3.

(Fig. 37).

(Fig. 38).

Poichè $S\,T$ è omologo ad $S\,T\,S$ e ad $S^{-1}T$, e 1 lo è ad S (rispetto a Γ_3), i lati ab, de; bc, cd; ag, eg sono rispettivamente omologhi. Deformiamo il campo come è indicato nelle fig. 39, 40; otterremo un piano od una sfera divisi in 6 campi. È utile osservare che la rete così costruita (fig. 40) non è regolare, il che corrisponde (art. 83) al fatto che Γ_3 non è un sottogruppo invariante. Così, mentre b ed f sono ambidue nodi di prima specie, intorno

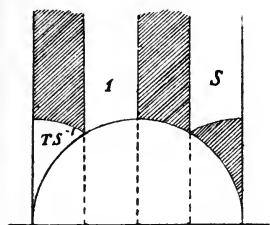
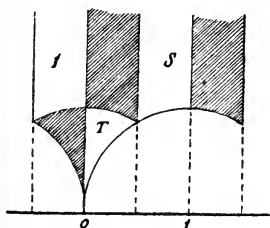
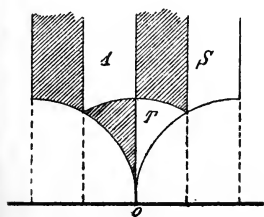
a b stanno due triangoli, intorno a f quattro; e parimenti, mentre c e g sono ambidue di terza

(*Fig. 39*).

(*Fig. 40*).

specie, intorno a c stanno quattro triangoli, intorno a g due.

Veniamo al gruppo Γ'_3. Invece delle (2) dobbiamo considerare le:

$$1, \quad T.$$

Colle solite considerazioni si trova che il campo fondamentale di Γ'_3 può essere formato coi bitriangoli 1, S, TS. Sostituendo poi al triangolo tratteggiato S e al triangolo bianco TS il triangolo tratteggiato S^{-1} e il triangolo bianco TS^{-1} ad essi

(*Fig. 41*).

rispettivamente omologhi, si ottiene un campo simmetrico rispetto all'asse imaginario.

(Fig. 42).

Infine per il gruppo Γ''_3 devono considerarsi le sostituzioni:

$$1, \quad STS.$$

Si trova che il campo fondamentale può constare dei bitriangoli 1, S, T. Esso si rende simmetrico rispetto all'asse imaginario sostituendo al triangolo tratteggiato S il triangolo tratteggiato S^{-1} ad esso omologo.

(Fig. 43).

Riducendo i campi fondamentali di Γ'_3, Γ''_3 a superficie chiuse, si troverebbero figure che non potrebbero essenzialmente differire da quella ottenuta per Γ_3, giacchè i tre sottogruppi Γ_3, Γ'_3, Γ''_3 sono equivalenti.

(Fig. 44).

97. Per ottenere altri sottogruppi del gruppo modulare, possiamo ri-

correre al seguente principio (PRINCIPIO D'ESISTENZA DEI SOTTOGRUPPI) * :

Abbiasi sopra una superficie chiusa C_s una rete di 2 s triangoli; i nodi della rete possano dividersi in tre specie, per modo che in ciascun nodo della 1ª *specie concorrano* 2 *o* 4 *triangoli, in ciascuno della* 2ª 2 *o* 6, *in ciascuno della* 3ª *un numero pari, e che i tre vertici di ciascun triangolo appartengano rispettivamente alle tre specie. Esiste allora un sistema di sottogruppi equivalenti di* Γ *di indice s.*

Accenniamo brevemente alla dimostrazione di questo principio, la quale risulterà più chiara dalle applicazioni che ne faremo tra poco.

Imaginando i triangoli della superficie C_s alternativamente bianchi e tratteggiati, scegliamo uno qualunque dei triangoli bianchi di essa e facciamolo corrispondere al triangolo bianco 1 della rete modulare; poi facciamo corrispondere analogamente i triangoli adiacenti, avendo cura che i nodi di 1ª, 2ª, 3ª specie di C_s corrispondano rispettivamente a quelli di 1ª, 2ª, 3ª specie della rete modulare. Otterremo così nel piano una figura connessa D_s formata di bitriangoli; ad ogni lato di C_s corrisponderà in D_s o un lato interno, od una coppia

* Un simile principio potrebbe stabilirsi per gruppi più generali del gruppo modulare, ma per noi ciò è inutile.

di lati periferici. Sia l, l' una di tali coppie, h il lato corrispondente di C_s, b il triangolo di D_s di cui l è lato, a il triangolo corrispondente di C_s, b' il triangolo della rete modulare esterno a D_s di cui l' è lato. Assumendo come corrispondente al triangolo a di C_s non più il triangolo b ma il triangolo b' della rete modulare, e procedendo come prima, potremo costruire un'altra figura connessa D'_s composta di s bitriangoli della rete modulare, che si potrà pure considerare come corrispondente a C_s. Così continuando, si potrà trovare un'infinità di figure tra loro adiacenti della rete modulare, che tutte potranno considerarsi come corrispondenti a C_s; e, per le ipotesi fatte sul numero dei triangoli che concorrono in ciascun nodo di C_s, non avverrà mai che alcuna parte del piano venga ricoperta più d'una volta.

Ora il campo D_s può considerarsi, come si è veduto, come il campo fondamentale d'un sottogruppo di Γ di indice s, di cui sappiamo trovare le sostituzioni generatrici; e C_s non è altro che la superficie che si ottiene deformando D_s in modo da portare a coincidere fra loro i suoi lati omologhi. Inoltre, se scegliamo diversamente il triangolo di C_s che vogliamo far corrispondere al triangolo 1 della rete modulare, otterremo in generale un campo diverso da D_s, ed un sottogruppo diverso da quello ottenuto; però i due sottogruppi saranno e-

quivalenti, perchè i loro campi fondamentali possono trasformarsi in una medesima superficie chiusa.

Il principio stabilito permette di costruire, con un numero finito di operazioni, tutti i sottogruppi di Γ di dato indice finito s.

Si formino tutti i possibili aggruppamenti connessi di s bitriangoli della rete modulare contenenti il bitriangolo 1, poi si stabilisca, per ciascun aggruppamento, in modo arbitrario una corrispondenza tra i lati esterni della figura risultante, e si riduca questa a superficie chiusa portando a coincidenza i lati corrispondenti. Se questa superficie chiusa soddisfa alle condizioni del principio d'esistenza, essa definisce un sistema di sottogruppi equivalenti d'indice s. È chiaro poi che a questo modo si ottengono tutti i possibili sottogruppi di indice s del gruppo modulare.

98. Tratteniamoci particolarmente sul caso in cui la rete tracciata sulla superficie chiusa C_s è regolare; indichiamo, come nell'art. 86, con $2n_1$, $2n_2$, $2n_3$ il numero dei triangoli concorrenti rispettivamente in un nodo di 1ª, 2ª, 3ª specie, e denotiamo la rete col simbolo (n_1, n_2, n_3). Perchè sieno soddisfatte le condizioni del principio d'esistenza, n_1 deve avere uno dei valori 1, 2, ed n_2 uno dei valori 1, 3. Cerchiamo i più semplici casi possibili valendoci della formola (1) dell'art. citato:

$$(1) \qquad p = 1 - s + \sum_{i=1}^{3} \frac{s}{n_i} \frac{n_i - 1}{2},$$

rammentando che p non può essere negativo, e che s deve essere multiplo di n_1, n_2, n_3.

Per semplicità scriveremo r invece di n_3.

Abbiamo 4 tipi possibili, cioè:

$$(1, 1, r); \quad (2, 1, r); \quad (1, 3, r); \quad (2, 3, r).$$

Per il 1° tipo dalla (1) segue:

$$p = 1 - s + \frac{s}{r}\,\frac{r-1}{2} = 1 - s\frac{r+1}{2r} < 1 - \frac{s}{2},$$

quindi $s < 2$, cioè $s = 1$, e $p = 0$. L'unico simbolo possibile in questo caso è (1, 1, 1); la rete è composta di un'unica coppia di triangoli, e il sottogruppo corrispondente è lo stesso gruppo modulare.

Per il 2° tipo si ha:

$$p = 1 - s + \frac{s}{4} + \frac{s}{r}\,\frac{r-1}{2} = 1 - \frac{s}{4} - \frac{s}{2r} < 1 - \frac{s}{4},$$

quindi $p = 0$, $s < 4$, e perciò, dovendo s essere multiplo di $n_1 = 2$, $s = 2$; infine $r = 2$. Si ha dunque il simbolo (2, 1, 2); la rete corrispondente è quella rappresentata nella fig. 35, i cui 4 triangoli concorrono tutti nel punto di 1ª specie e e in quello di 3ª specie a, mentre ne concorrono due in ciascuno di quelli di 2ª specie b, d. Il sottogruppo relativo è dunque il gruppo Γ_2 già studiato.

Per il 3° tipo si ha:

$$p = 1 - s + \frac{s}{3} + \frac{s}{r}\,\frac{r-1}{2} = 1 - \frac{s}{6} - \frac{s}{2r} < 1 - \frac{s}{6},$$

quindi $p = 0$, $s < 6$, e perciò, dovendo s essere multiplo di $n_2 = 3$, $s = 3$. Ne risulta $r = 3$; e si ha il simbolo $(1, 3, 3)$. Del gruppo corrispondente non ci occupiamo, perchè esso non ha per noi un interesse particolare. Il suo campo fondamentale è formato dai bitriangoli 1, S, S^2.

Finalmente veniamo al 4° tipo. Per esso si ha:

$$p = 1 - s + \frac{s}{4} + \frac{s}{3} + \frac{s}{r}\,\frac{r-1}{2} = 1 + \frac{s}{12} - \frac{s}{2r},$$

da cui:

$$s = \frac{12r(p-1)}{r-6}. \tag{2}$$

Qui le soluzioni sono infinite, e noi considereremo soltanto le più semplici. Indicheremo con $\Gamma_{[r]}$ il sottogruppo corrispondente alla rete $(2, 3, r)$.

Supponiamo dapprima $p = 0$; allora:

$$s = \frac{12r}{6-r}.$$

Dev'essere $r < 6$; inoltre, poichè r deve dividere s, $\frac{12}{6-r}$ deve essere intero. I valori possibili di r sono dunque $2, 3, 4, 5$, e corrispondentemente si ha $s = 6, 12, 24, 60$. Le reti relative sono, come è facile riconoscere:

$(2, 3, 2)$: la rete diedrica per $m = 3$; essa dà luogo, come si è già veduto, al sottogruppo Γ_6, che ora possiamo anche designare con $\Gamma_{[2]}$;

$(2, 3, 3)$: la rete tetraedrica, che, per il prin-

cipio di esistenza, dà luogo ad un sottogruppo invariante $\Gamma_{[3]}$ d'indice 12;

(2, 3, 4): la rete ottaedrica, che dà luogo ad un sottogruppo invariante $\Gamma_{[4]}$ d'indice 24;

(2, 3, 5): la rete icosaedrica, che dà luogo ad un sottogruppo invariante $\Gamma_{[5]}$ d'indice 60.

Supponiamo ora $p = 1$. Si ha dalla (2) $r = 6$ qualunque sia s, quindi il simbolo (2, 3, 6). Ciò ha la sua verifica nel fatto che, presa una parte finita qualunque della rete della fig. 17, si può farla corrispondere ad una parte della rete modulare, assegnando come corrispondenti agli angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ della prima gli angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$, o della seconda.

Infine facciamo $p = 2$. La (2) diviene:

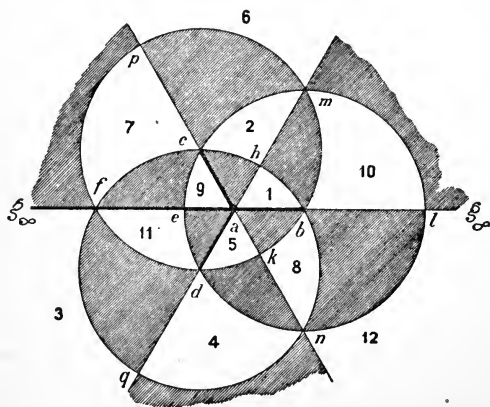
$$s = \frac{12r}{r-6};$$

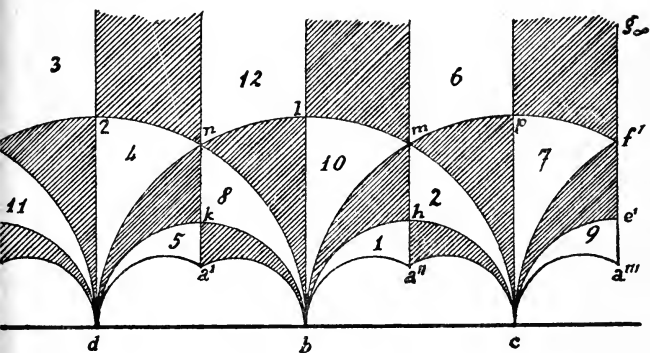
$r - 6$ deve essere divisore di 12, quindi $r = 7$, 8, 9, 10, 12, 18, e corrispondentemente $s = 84$, 48, 36, 30, 24, 18. Si hanno dunque i seguenti simboli:

$$\begin{array}{ll} (2,\ 3,\ 7), & s = 84; \\ (2,\ 3,\ 8), & s = 48; \\ (2,\ 3,\ 9), & s = 36; \\ (2,\ 3,\ 10), & s = 30; \\ (2,\ 3,\ 12), & s = 24; \\ (2,\ 3,\ 18), & s = 18. \end{array}$$

È quasi inutile ricordare che tutti i simboli trovati rappresentano reti *aritmeticamente possibili*; resterebbe ad esaminare in ciascun caso se esista effettivamente una rete regolare che risponda ai dati relativi, nel qual caso potrà affermarsi, pel principio di esistenza, che esiste un corrispondente sottogruppo di Γ.

99. Come si è veduto nell'art. prec., la rete diedrica per $m = 3$ e le altre reti poliedriche dànno luogo ad altrettanti sottogruppi di Γ. Noi daremo qui la costruzione effettiva del sottogruppo pel solo caso della rete tetraedrica, rimandando per gli altri casi alla classica opera di Klein-Fricke.

Riprendiamo la figura 11, dove, per semplicità, denoteremo ciascun triangolo bianco, invece

(Fig. 45).

che col proprio simbolo, con un numero progressivo dall'1 al 12. Tagliando la sfera lungo le linee segnate a tratto forte, e deformando opportunamente la rete, si potrà portarla a coincidere con una

(*Fig. 46*).

parte della rete modulare, come è indicato nella fig. 46. Questa parte della rete è il campo fondamentale del sottogruppo invariante $\Gamma_{[3]}$ o Γ_{12} di Γ. Le operazioni generatrici del sottogruppo sono quelle che trasformano l'uno nell'altro i lembi corrispondenti dei tagli, cioè, nel caso nostro, quelle che mutano ag, $a'd$, $a''b$, $a'''c$ rispettivamente in $a'''g$, $a\,d$, $a'\,b$, $a''\,c$. Esse sono, come si vede dalla figura, quattro sostituzioni paraboliche di ampiezza 3 i cui poli sono rispettivamente i punti ∞, -1, 0, 1. Facendo nella formola (2) dell'art. 91 successivamente:

$$\lambda = 3, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1;$$
$$\lambda = 3, \quad \mu = 1, \quad \nu = 1;$$
$$\lambda = 3, \quad \mu = 1, \quad \nu = 0;$$
$$\lambda = 3, \quad \mu = 1, \quad \nu = -1,$$

si ottengono le 4 sostituzioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

100. Abbiasi una rete regolare $(2, 3, n)$ di $2s$ triangoli distesa sopra una superficie chiusa C_s. Ritagliando la superficie lungo certe linee e deformandola opportunamente, si può portarla a coincidere con un insieme connesso D_s di $2s$ triangoli della rete modulare; e questa rete si scompone in una infinità di campi omologhi a D_s rispetto al sottogruppo $\Gamma_{[n]}$ definito dalla rete data. Poichè tanto intorno ad un nodo di 1ª specie di C_s che intorno ad uno della rete modulare stanno 4 triangoli, ad una linea chiusa di C_s comprendente un nodo di 1ª specie corrisponde nel piano un'analoga linea chiusa; e così dicasi dei nodi di 2ª specie. Invece, mentre intorno ad un nodo di 3ª specie di C_s stanno $2n$ triangoli, intorno ad uno della rete modulare ne stanno infiniti, e perciò ad una linea chiusa di C_s racchiudente un nodo di 3ª specie corrisponde nel piano una linea aperta che va da un punto ad un suo omologo oltrepassando n dei triangoli aventi il vertice nel nodo di 3ª specie corrispondente a quello considerato in

C_s. E poichè qualunque linea chiusa di C_s è equivalente ad un insieme di linee chiuse racchiudenti ciascuna un solo nodo, può dirsi che il passaggio da un punto del piano ad un qualunque suo omologo rispetto a $\Gamma_{[n]}$ può farsi mediante una successione di movimenti come quello testè descritto. Ricordando quanto si disse nell'art. 91, può esprimersi ciò dicendo che *ogni sostituzione di* $\Gamma_{[n]}$ *è un prodotto di sostituzioni paraboliche di ampiezza n,* ossia che *come sostituzioni generatrici di* $\Gamma_{[n]}$ *possono assumersi delle sostituzioni tutte paraboliche e di ampiezza n.* Ora tutte le sostituzioni paraboliche di ampiezza n sono tra loro equivalenti (art. 91), e d'altra parte il sottogruppo $\Gamma_{[n]}$ è invariante, cioè equivalente soltanto a sè stesso; quindi $\Gamma_{[n]}$ *contiene tutte le sostituzioni paraboliche di ampiezza n del gruppo modulare.*

Il gruppo Γ si riduce, a meno di sostituzioni di $\Gamma_{[n]}$, ad un gruppo finito $G_{[n]}$ d'ordine s che è ad esso isomorfo; all'identità in $G_{[n]}$ corrisponde in Γ appunto il sottogruppo $\Gamma_{[n]}$, ad ogni sottogruppo di $G_{[n]}$ corrisponde un sottogruppo di Γ contenente $\Gamma_{[n]}$. Il gruppo $G_{[n]}$ può anche considerarsi come il gruppo delle trasformazioni in sè stessa della superficie C_s.

101. Un sottogruppo importante di Γ contenente a sua volta come sottogruppo $\Gamma_{[n]}$ è quello formato da tutte le sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ di Γ per cui:

$$(1) \qquad \alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod n.$$

Noi lo indicheremo momentaneamente con $\Gamma_{(n)}$. Che queste sostituzioni formino un gruppo, è evidente; infatti dalle:

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \ \beta \equiv \gamma \equiv 0, \ \alpha' \equiv \delta' \equiv 1, \ \beta' \equiv \gamma' \equiv 0 \pmod n,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix}$$

segue:

$$\alpha'' \equiv \delta'' \equiv 1, \quad \beta'' \equiv \gamma'' \equiv 0 \pmod n.$$

Che poi $\Gamma_{(n)}$ sia un sottogruppo di $\Gamma_{(n)}$, risulta dall'osservazione che [art. 91, (2)] ogni sostituzione parabolica di ampiezza n soddisfa alle (1) e quindi appartiene a $\Gamma_{(n)}$, e che ogni sostituzione di $\Gamma_{[n]}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di ampiezza n.

Il sottogruppo $\Gamma_{(n)}$ *è invariante.*

Sia $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ una sostituzione qualunque di $\Gamma_{(n)}$ e $Q = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ una sostituzione qualunque di Γ; se:

$$Q^{-1} P Q = \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix},$$

le espressioni di α'', etc. sono date dalle (2) dell'art. 93. Ora queste possono scriversi, tenuto conto

che $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$:

$$\alpha'' = (\alpha - \delta)\alpha'\delta' - \beta\alpha'\gamma' + \gamma\beta'\delta' + \delta,$$
$$\beta'' = -(\alpha - \delta)\alpha'\beta' + \beta\alpha'^2 - \gamma\beta'^2,$$
$$\gamma'' = (\alpha - \delta)\gamma'\delta' - \beta\gamma'^2 + \gamma\delta'^2,$$
$$\delta'' = -(\alpha - \delta)\alpha'\delta' + \beta\alpha'\gamma' - \gamma\beta'\delta' + \alpha.$$

Supposto pertanto che le α, β, γ, δ soddisfacciano alle (1), si ha:

$$\alpha'' \equiv \delta'' \equiv 1, \quad \beta'' \equiv \gamma'' \equiv 0 \pmod{n},$$

sicchè anche $Q^{-1}PQ$ appartiene a $\Gamma_{\{n\}}$.

Può aggiungersi che $\Gamma_{\{n\}}$ *è anche sottogruppo invariante di* $\overline{\Gamma}$.

Si trova infatti senza difficoltà:

$$APA = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix},$$

$$BPB = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \alpha-\beta+\gamma-\delta \\ -\gamma & \delta-\gamma \end{pmatrix}, \quad CPC = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

e si vede che queste tre sostituzioni appartengono a $\Gamma_{\{n\}}$ quando vi appartenga P.

102. Per stabilire che $\Gamma_{\{n\}}$ è un sottogruppo di Γ d'indice finito, e per determinarne l'indice, conviene premettere alcune considerazioni.

Diremo che due sostituzioni:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

sono *congruenti* rispetto al modulo n, e scriveremo:

$$P \equiv P' \pmod{n},$$

se:

(1) $\alpha' \equiv \alpha, \quad \beta' \equiv \beta, \quad \gamma' \equiv \gamma, \quad \delta' \equiv \delta \pmod{n},$

oppure:

(2) $\alpha' \equiv -\alpha, \quad \beta' \equiv -\beta, \quad \gamma' \equiv -\gamma, \quad \delta' \equiv -\delta \pmod{n}$.

Tutte e sole le sostituzioni P di $\Gamma_{\{n\}}$ soddisfanno alla congruenza:

$$P \equiv 1 \pmod{n} \; *.$$

Se $\Gamma_{\{n\}}$ contiene P, contiene anche P^{-1}.

Se $P \equiv 1$, $PP' \equiv P'P \equiv P'$.

Infatti, se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soddisfanno alle (1) dell'art. 101, si ha, qualunque siano le $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$:

$$\begin{aligned}
\alpha'\alpha + \beta'\gamma &\equiv \alpha'\alpha + \gamma'\beta \equiv \alpha', \\
\alpha'\beta + \beta'\delta &\equiv \beta'\alpha + \delta'\beta \equiv \beta', \\
\gamma'\alpha + \delta'\gamma &\equiv \alpha'\gamma + \gamma'\delta \equiv \gamma', \\
\gamma'\beta + \delta'\delta &\equiv \beta'\gamma + \delta'\delta \equiv \delta'.
\end{aligned}$$

Se $P \equiv P'$, $PP'^{-1} \equiv P'^{-1}P \equiv 1$, e reciprocamente.

Si ha:

$$P'^{-1} = \begin{pmatrix} \delta' & -\beta' \\ -\gamma' & \alpha' \end{pmatrix},$$

quindi:

$$PP'^{-1} = \begin{pmatrix} \delta'\alpha - \beta'\gamma & \delta'\beta - \beta'\delta \\ -\gamma'\alpha + \alpha'\gamma & -\gamma'\beta + \alpha'\delta \end{pmatrix},$$

---

* È quasi inutile osservare che qui 1 sta a rappresentare la sostituzione identica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'ora innanzi ometteremo per brevità nelle congruenze l'indicazione (mod n) quando ciò non possa dar luogo ad equivoco.

$$P'^{-1} P = \begin{pmatrix} \delta'\alpha - \gamma'\beta & -\beta'\alpha + \alpha'\beta \\ \delta'\gamma - \gamma'\delta & -\beta'\gamma + \alpha'\delta \end{pmatrix}.$$

Ora, supposto:

$$\alpha' \equiv \pm \alpha, \quad \beta' \equiv \pm \beta, \quad \gamma' \equiv \pm \gamma, \quad \delta' \equiv \pm \delta,$$

dove il segno deve essere preso eguale in tutte e quattro le formole, si ha:

$$\begin{aligned} \delta'\alpha - \beta'\gamma &\equiv \pm(\alpha\delta - \beta\gamma) = \pm 1, \\ \delta'\beta - \beta'\delta &\equiv 0, \\ -\gamma'\alpha + \alpha'\gamma &\equiv 0, \\ -\gamma'\beta + \alpha'\delta &\equiv \pm(\alpha\delta - \beta\gamma) = \pm 1; \\ \delta'\alpha - \gamma'\beta &\equiv \pm(\alpha\delta - \beta\gamma) = \pm 1, \\ -\beta'\alpha + \alpha'\beta &\equiv 0, \\ \delta'\gamma - \gamma'\delta &\equiv 0, \\ -\beta'\gamma + \alpha'\delta &\equiv \pm(\alpha\delta - \beta\gamma) = \pm 1. \end{aligned}$$

Reciprocamente, supposto:

$$\begin{aligned} \delta'\alpha - \beta'\gamma &\equiv -\gamma'\beta + \alpha'\delta \equiv 1, \\ \delta'\beta - \beta'\delta &\equiv -\gamma'\alpha + \alpha'\gamma \equiv 0, \end{aligned}$$

e tenuto conto che:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

si ha:

$$\begin{aligned} \alpha(\delta - \delta') - \gamma(\beta - \beta') &\equiv 0, \\ \beta(\delta - \delta') - \delta(\beta - \beta') &\equiv 0, \\ -\beta(\gamma - \gamma') + \delta(\alpha - \alpha') &\equiv 0, \\ -\alpha(\gamma - \gamma') + \gamma(\alpha - \alpha') &\equiv 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima di queste per δ e la seconda per $-\gamma$ e sommando, oppure moltiplicando la prima per β e la seconda per $-\alpha$ e sommando, si ottiene:

$$\delta - \delta' \equiv 0, \quad \beta - \beta' \equiv 0;$$

moltiplicando invece la terza per α e la quarta per $-\beta$ e sommando, oppure moltiplicando la terza per γ e la quarta per $-\delta$ e sommando, si ottiene:

$$\alpha - \alpha' \equiv 0, \quad \gamma - \gamma' \equiv 0.$$

Nello stesso modo può procedersi partendo dalle ipotesi:

$$\delta'\alpha - \gamma'\beta \equiv -\beta'\gamma + \alpha'\delta \equiv 1,$$
$$-\beta'\alpha + \alpha'\beta \equiv \delta'\gamma - \gamma'\delta \equiv 0.$$

103. Segue dalle cose dette che, se si indicano con:

$$1, P_1, P_2, \dots$$

le sostituzioni di $\Gamma_{\{n\}}$, e si forma per il gruppo Γ la solita tabella:

$$(1) \quad \begin{cases} 1, & P_1, & P_2, & \dots \\ Q_1, & Q_1 P_1, & Q_1 P_2, & \dots \\ Q_2, & Q_2 P_1, & Q_2 P_2, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \end{cases}$$

le sostituzioni della prima linea, e solo queste, sono $\equiv 1$, e quelle di ciascuna linea sono tra loro congruenti, mentre quelle di due linee diverse sono incongruenti. Infatti:

a) Per definizione $\Gamma_{\{n\}}$ è l'insieme delle sostituzioni di Γ congruenti ad 1;

b) Essendo $P_i \equiv 1$, si ha:

$$Q_h P_i \equiv Q_h,$$

quindi:

$$Q_h P_i \equiv Q_h P_j;$$

c) Se fosse, per $h \neq k$:

$$Q_h P_i \equiv Q_k P_j,$$

sarebbe anche:

$$Q_h \equiv Q_k P_j P_i^{-1} \equiv Q_k,$$

e quindi $Q_h^{-1} Q_k \equiv 1$, sicchè $Q_h^{-1} Q_k$ apparterrebbe alla prima linea, e per conseguenza $Q_h Q_h^{-1} Q_k = Q_k$ alla linea che contiene Q_h, mentre essa appartiene ad un'altra linea.

Da ciò risulta, che il gruppo $G_{\{n\}}$ è quello che si ottiene da Γ considerando come identiche le sostituzioni congruenti rispetto ad n.

Per formare dunque il gruppo $G_{\{n\}}$, basta prendere un sistema di sostituzioni di Γ incongruenti rispetto al modulo n. La costruzione di un tale sistema ci condurrà alla determinazione dell'ordine di $G_{\{n\}}$, ossia dell'indice di $\Gamma_{\{n\}}$.

104. Una proprietà notevole dei gruppi $G_{\{n\}}$ è la seguente.

Indichiamo con S, T le sostituzioni di $G_{\{n\}}$ corrispondenti nell'isomorfismo tra $G_{\{n\}}$ e Γ alle sostituzioni di Γ designate colle stesse lettere, per modo che:

$$(1) \qquad S^n = 1, \quad T^2 = 1, \quad (TS)^3 = 1.$$

Può dimostrarsi che tra le S, T non può esistere, oltre queste, alcun'altra relazione.

Supponiamo infatti che tra queste sostituzioni esista una relazione, che, per fissare le idee, scri-

viamo:

$$S^{\alpha}\, T S^{\beta}\, T S^{\gamma}\, T S^{\delta} = 1. \tag{2}$$

Sulla superficie chiusa corrispondente al sottogruppo $\Gamma_{\{n\}}$ partendo da un punto del triangolo 1 tracciamo una linea, la quale passi successivamente entro i triangoli:

$$S, S^2, \ldots, S^{\delta}, TS^{\delta}, STS^{\delta}, S^2TS^{\delta}, \ldots, S^{\gamma}TS^{\delta}, \ldots$$
$$\ldots, S^{\alpha}TS^{\beta}TS^{\gamma}TS^{\delta};$$

siccome quest'ultimo triangolo, per la (2), coincide col triangolo 1, noi potremo terminare la linea al punto di partenza, ossia avere una linea chiusa. Essa poi, per deformazione continua, può mutarsi nell'insieme di più linee racchiudenti ciascuna uno solo dei nodi della rete in essa contenuti. Ciascuna di tali linee può imaginarsi formata: da una linea che va da un punto del triangolo 1 a un punto prossimo al nodo; da un circolo arbitrariamente piccolo intorno al nodo stesso; e dalla linea poc'anzi accennata percorsa in senso inverso. Il nodo, secondo che è di 1ª, 2ª o 3ª specie, è un trasformato del polo della sostituzione T, TS o S, quindi, indicando con M un certo prodotto formato colle S, T, un giro intorno ad esso sarà rappresentato rispettivamente da:

$$M^{-1}T^2M, \quad M^{-1}(TS)^3M, \quad M^{-1}S^nM.$$

La linea corrisponde ad un certo prodotto N formato colle S, T. Quindi una delle linee chiuse accennate sarà rappresentata dal prodotto:

$$NM^{-1}UMN^{-1},$$

dove U denota T^2, $(TS)^3$ o S^n. In tutti i casi il prodotto scritto si riduce all'identità in virtù delle relazioni (1), e perciò anche il prodotto che figura nella (2), che è equivalente ad un prodotto di espressioni come quella poc'anzi formata, si riduce identicamente ad 1. Dunque la relazione (2) è una conseguenza delle (1).

Come corollario delle cose ora dette si ha il *teorema di* DYCK: *Se S, T sono due operazioni di natura qualsiasi, legate dalle relazioni* (1) *ed atte a generare un gruppo, il gruppo da esse generato è oloedricamente isomorfo a* $G_{\{n\}}$.

105. Diciamo *ridotta* ogni sostituzione, unitaria o no, i cui elementi sono tutti numeri interi non negativi ed inferiori ad n; diciamo poi *complementari* due ridotte i cui elementi omologhi, sommati due a due, dànno 0 od n.

Una sostituzione ridotta, il cui determinante è $\equiv 1 \pmod{n}$, *è eguale alla sua complementare sempre e soltanto se* $n = 2$.

Se $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ è una delle sostituzioni, i numeri 2α, 2β, 2γ, 2δ, di cui due almeno sono diversi da 0, devono valere 0 od n, quindi n dev'essere pari. Posto $n = 2m$, non potranno tutti i 4 numeri α, β, γ, δ valere m, giacchè allora sarebbe $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$; due o tre di essi varranno m e

gli altri o l'altro o, e si avrà:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm m^2,$$

donde:

$$\pm m^2 \equiv 1 \pmod{2m},$$

relazione da cui segue che 1 dev'essere divisibile per m. Dunque $m = 1$, e $n = 2$.

Due sostituzioni ridotte diverse sono congruenti sempre e soltanto se sono complementari; infatti, se due sostituzioni ridotte $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ sono diverse tra loro, non può essere:

$$\alpha' \equiv \alpha, \quad \beta' \equiv \beta, \quad \gamma' \equiv \gamma, \quad \delta' \equiv \delta,$$

ed affinchè sia:

$$\alpha' \equiv -\alpha, \quad \beta' \equiv -\beta, \quad \gamma' \equiv -\gamma, \quad \delta' \equiv -\delta,$$

è necessario e sufficiente che sieno complementari.

Data una sostituzione qualunque di Γ, *può trovarsi una sostituzione ridotta ad essa congruente*; tale è la sostituzione formata coi resti minimi non negativi dei suoi elementi. Ne segue, tenendo conto di ciò che si disse poc'anzi, che *ogni sostituzione modulare è congruente a due e a due sole sostituzioni ridotte tra loro complementari*; ed anche, che *tutte le sostituzioni d'una stessa linea della tabella* (1) *dell'art. 103 sono congruenti a due e a due sole sostituzioni ridotte tra loro complementari.* Così per esempio gli elementi della prima linea sono congruenti alle due sostituzioni $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix}$.

È evidente che, se una sostituzione ridotta $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ è congruente ad una sostituzione di Γ, i suoi elementi soddisfanno alla congruenza:

$$(1) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{n}.$$

Reciprocamente, *se una sostituzione ridotta* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *soddisfa alla congruenza* (1), *esistono sostituzioni di* Γ *ad essa congruenti.*

Sia λ il massimo divisore di α primo con n; potrà determinarsi un numero p tale che sia:

$$(2) \qquad np \equiv 1 - \beta \pmod{\lambda}.$$

Posto:

$$(3) \qquad b = \beta + np,$$

si ha dalla (2):

$$b \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

e quindi b, λ sono primi tra loro, cioè α, b non possono avere alcun divisore comune che sia primo con n. D'altra parte, per la (1), α, β, n, e quindi anche α, b, n, non possono avere divisori comuni; cioè α, b non possono avere alcun divisore comune che divida n. In conclusione dunque α, b non possono avere divisori comuni, cioè sono primi tra loro. Ne segue che l'equazione indeterminata:

$$(4) \qquad \alpha k - bh = q,$$

dove h, k sono due incognite, è risolubile qualunque sia q. Ora dalle (1), (3) segue:

$$\alpha\delta - b\gamma \equiv 1 \pmod{n},$$

che può scriversi:

$$\alpha\delta - b\gamma = 1 + nq.$$

Combinando questa relazione colla (4), si ha:

$$\alpha(\delta - nk) - b(\gamma - nh) = 1,$$

sicchè la sostituzione:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta + np \\ \gamma - nh & \delta - nk \end{pmatrix}$$

appartiene a Γ. D'altra parte essa è congruente alla data sostituzione ridotta, sicchè resta dimostrato l'asserto.

Dal risultato ottenuto segue che, data una sostituzione ridotta soddisfacente alla (1), esiste una linea della tabella (1) dell'art. 103 formata da sostituzioni ad essa congruenti.

Come elementi del gruppo $G_{\{n\}}$ possono pertanto assumersi sostituzioni ridotte che soddisfacciano alla (1), con queste avvertenze:

Che di due sostituzioni complementari se ne deve prendere una ed una sola;

Che come prodotto di due sostituzioni ridotte deve considerarsi la sostituzione ridotta congruente al loro prodotto.

106. Indichiamo con $\mu(n)$ l'ordine di $G_{\{n\}}$, ossia l'indice di $\Gamma_{\{n\}}$, sicchè possiamo rappresentare questi gruppi rispettivamente con $G_{\mu(n)}$, $\Gamma_{\mu(n)}$. Il numero $\mu(n)$ è la metà del numero delle sostituzioni ridotte di determinante $\equiv 1$, tranne il caso di $n = 2$, in cui $\mu(n)$ è il numero di tali sosti-

tuzioni. Invece di $G_{\mu(n)}$ si ha un gruppo $G_{2\mu(n)}$ di ordine $2\mu(n)$ considerando le sostituzioni come omogenee rispetto a due variabili; in tal caso infatti due sostituzioni devono riguardarsi come congruenti soltanto quando sussistono le (1) dell'art. 102, e non già quando sussistono le (2).

Vogliamo determinare il numero $2\mu(n)$, che è il numero delle soluzioni incongruenti della:

$$(1) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{n}.$$

Premettiamo un'osservazione.

Sia $n = n_1 n_2$, essendo n_1, n_2 primi tra loro. Ogni soluzione della (1) costituisce una soluzione di ciascuna delle due congruenze:

$$(2) \quad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{n_1}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{n_2}.$$

Reciprocamente ogni coppia di soluzioni α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_2, β_2, γ_2, δ_2 delle (2) dà luogo ad una soluzione α, β, γ, δ della (1). Infatti, poichè n_1 ed n_2 sono primi tra loro, ciascuna delle congruenze:

$$n_1 a + \alpha_1 \equiv \alpha_2, \quad n_1 b + \beta_1 \equiv \beta_2,$$
$$n_1 c + \gamma_1 \equiv \gamma_2, \quad n_1 d + \delta_1 \equiv \delta_2 \pmod{n_2},$$

dove le incognite sono a, b, c, d, ammette una ed una sola soluzione; trovate le a, b, c, d, i numeri:

$$\alpha = n_1 a + \alpha_1,$$
$$\beta = n_1 b + \beta_1,$$
$$\gamma = n_1 c + \gamma_1,$$
$$\delta = n_1 d + \delta_1$$

soddisfanno alla (1).

Segue da ciò:

(3) $$2\mu(n_1 n_2) = 2\mu(n_1) 2\mu(n_2).$$

Pertanto basta determinare l'espressione di $\mu(n)$ per il caso in cui n è una potenza d'un numero primo.

Sia $n = p^r$, p essendo un numero primo. Se α non è divisibile per p, e $0 \leqq \beta < p^r$, la congruenza:

(4) $$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{p^r}$$

ci dà per ogni valore arbitrario di γ uno ed un solo valore di δ non negativo e minore di p^r; e quindi, poichè i valori possibili incongruenti di γ sono p^r, a due dati valori di α, β corrispondono p^r coppie di valori γ, δ. Se α è divisibile per p, β non può esserlo, e allora per ogni δ arbitrario si ha un solo valore di γ, quindi anche in questo caso p^r coppie di valori γ, δ. Dunque ad ogni coppia di valori α, β minori di p^r e non ambidue divisibili per p corrispondono p^r coppie di valori γ, δ tali da rendere soddisfatta la (4). Calcoliamo il numero delle coppie possibili α, β. I valori di α minori di p^r e non divisibili per p, che sono $p^r - p^{r-1}$, possono accoppiarsi con qualunque valore di β minore di p^r, sicchè dànno luogo a $p^r(p^r - p^{r-1})$ coppie; invece i valori di α divisibili per p, che sono p^{r-1}, possono accoppiarsi coi valori di β non divisibili per p, formando $p^{r-1}(p^r - p^{r-1})$ coppie.

In tutto il numero delle coppie è dunque:

$$(p^r + p^{r-1})(p^r - p^{r-1}) = p^{2r}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

e il numero delle soluzioni della (4) è per conseguenza:

$$p^{3r}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Si ha pertanto:

$$(5) \qquad 2\mu(p^r) = p^{3r}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Se quindi:

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_h^{r_h},$$

segue dalla (3):

$$2\mu(n) = n^3\left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_h^2}\right).$$

Pel caso di $p = 2$, $r = 1$ invece di $2\mu(p^r)$ deve scriversi nella (5) $\mu(p^r)$.

Si ottiene dalla (5):

$\mu(2) = 6$, $\mu(3) = 12$, $\mu(4) = 24$, $\mu(5) = 60$, sicchè i gruppi $\Gamma_{\mu(n)}$ e $\Gamma_{[n]}$ coincidono per $n = 2$, 3, 4, 5. Al contrario per $n > 5$ essi non possono coincidere, giacchè $\Gamma_{\mu(n)}$ è un sottogruppo di Γ d'indice finito mentre $\Gamma_{[n]}$ è un sottogruppo d'indice infinito (v. art. 98).

107. Supponiamo che n possa scomporsi in due fattori primi tra loro n_1, n_2:

$$n = n_1 n_2;$$

sarà:

$$2\mu(n) = 2\mu(n_1) . 2\mu(n_2) .$$

Date due sostituzioni omogenee qualunque P, Q, il gruppo $G_{2\mu(n)}$ considerato nell'art. prec. contiene una ed una sola sostituzione S tale che:

$$S \equiv P \pmod{n_1}, \quad S \equiv Q \pmod{n_2}.$$

Prendiamo per P successivamente tutte le sostituzioni del gruppo $G_{2\mu(n_1)}$, e facciamo $Q \equiv 1$; otterremo per S un sistema di $2\mu(n_1)$ sostituzioni omogenee incongruenti tra loro rispetto ad n_1 e tutte congruenti ad 1 rispetto ad n_2. Questo sistema è manifestamente un gruppo, che non differisce sostanzialmente dal gruppo $G_{2\mu(n_1)}$, e quindi può denotarsi con questo stesso simbolo. Dunque $G_{2\mu(n)}$ contiene come sottogruppo $G_{2\mu(n_1)}$. È facile vedere che questo è un sottogruppo invariante; infatti, se S è una sua sostituzione qualunque e T una sostituzione qualunque del gruppo, si ha:

$$T^{-1} S T \equiv T^{-1} T = 1 \pmod{n_2}.$$

Parimenti $G_{2\mu(n)}$ contiene come sottogruppo invariante $G_{2\mu(n_2)}$. Di più le sostituzioni dei due sottogruppi sono permutabili. Infatti, se S_1, S_2 sono sostituzioni qualunque di $G_{2\mu(n_1)}$, $G_{2\mu(n_2)}$, sicchè:

$$S_1 \equiv 1 \pmod{n_2}, \quad S_2 \equiv 1 \pmod{n_1},$$

ne segue:

$$S_1 S_2 \equiv \begin{cases} S_1 \pmod{n_1}, \\ S_2 \pmod{n_2}, \end{cases} \quad S_2 S_1 \equiv \begin{cases} S_1 \pmod{n_1}, \\ S_2 \pmod{n_2}, \end{cases}$$

donde $S_1 S_2 \equiv S_2 S_1$. Si possono quindi applicare al gruppo $G_{2\mu(n)}$ le considerazioni dell'art. 14, le

quali dànno il modo di costruire i sottogruppi di $G_{2\mu(n)}$ quando si conoscono quelli di $G_{2\mu(n_1)}$, $G_{2\mu(n_2)}$. La ricerca diretta dei sottogruppi del gruppo $G_{2\mu(n)}$ può pertanto limitarsi al caso in cui n è una potenza d'un numero primo.

Noi però tratteremo soltanto un caso ancora più semplice, quello in cui n è un numero primo.

108. Dobbiamo premettere qualche cenno su certi simboli introdotti da Galois nella teoria dei numeri.

Se N è un non resto quadratico di un modulo p, che supporremo primo, la congruenza:

$$x^2 \equiv N \pmod p$$

non ha alcuna soluzione. Con un procedimento analogo a quello usato nella teoria degli imaginarî si introduce un nuovo simbolo ε definito dalla congruenza:

$$\varepsilon^2 \equiv N \pmod p.$$

Diremo appunto ε un *numero imaginario,* e gli aggregati della forma $a + b\varepsilon$, dove a, b sono numeri interi ordinari, *numeri complessi.*

Due numeri complessi $a + b\varepsilon$, $a' + b'\varepsilon$ si dicono *eguali* se $a = a'$, $b = b'$. In particolare un numero complesso $a + b\varepsilon$ è nullo se $a = b = 0$.

I numeri $a + b\varepsilon$, $a - b\varepsilon$ si dicono *coniugati;* se $a + b\varepsilon = \alpha$, noi scriveremo $a - b\varepsilon = \bar{\alpha}$. Due numeri coniugati sono eguali sempre e soltanto se sono reali.

Se $\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}} \equiv 0$, *ne segue* $\boldsymbol{a} \equiv \overline{\boldsymbol{a}} \equiv 0$. Infatti si ha:

$$0 \equiv \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}} \equiv a^2 - b^2 N,$$

ossia:

$$a^2 \equiv b^2 N;$$

ma, se a e b non sono nulli, a^2 è un resto quadratico, mentre $b^2 N$ è un non resto, sicchè la congruenza non può sussistere se non è $a \equiv b \equiv 0$, quindi $\boldsymbol{a} \equiv \overline{\boldsymbol{a}} \equiv 0$.

Se $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *sono due numeri complessi, e* $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \equiv 0$, *dev'essere o* $\boldsymbol{a} \equiv 0$ *o* $\boldsymbol{b} \equiv 0$.

Supponiamo:

$$\boldsymbol{a} = a + b\varepsilon \not\equiv 0, \quad \boldsymbol{b} = a' + b'\varepsilon.$$

Dall'ipotesi del teorema segue:

$$0 \equiv \overline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$$

$$\equiv (a^2 - b^2 N)(a' + b'\varepsilon) \equiv (a^2 - b^2 N)a' + (a^2 - b^2 N)b'\varepsilon,$$

donde:

$$(a^2 - b^2 N)a' \equiv (a^2 - b^2 N)b' \equiv 0;$$

ma $a^2 - b^2 N \not\equiv 0$, quindi $a' \equiv b' \equiv 0$, ossia $\boldsymbol{b} \equiv 0$.

Nel campo dei numeri ordinari e complessi *ogni congruenza di 2° grado* (rispetto ad un modulo primo) *ha due e due sole radici,* eguali o distinte. Infatti la congruenza:

$$(1) \qquad a x^2 + 2 b x + c \equiv 0 \pmod{p}$$

può scriversi:

$$(2) \qquad (a x + b)^2 \equiv b^2 - a c \pmod{p};$$

ora, se $b^2 - ac$ è resto di p, esistono, come è noto, due radici reali della (2) e quindi della (1),

se $b^2 - ac$ è non resto, potrà porsi, essendo d un certo numero:

$$b^2 - ac \equiv d^2 N \pmod{p},$$

e quindi:

$$ax + b \equiv \pm d\varepsilon \pmod{p},$$

da cui:

$$x \equiv -be \pm de\varepsilon \pmod{p},$$

essendo e il numero che soddisfa alla congruenza:

$$ae \equiv 1 \pmod{p}.$$

Si dimostra, come pei numeri ordinari, che *una congruenza di grado m rispetto ad un modulo primo non può avere più di m radici.*

Sieno:

$$\alpha = a + b\varepsilon, \quad \bar{\alpha} = a - b\varepsilon$$

due numeri complessi coniugati. Sarà:

$$\alpha^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b\varepsilon + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 \varepsilon^2 + \cdots$$

$$\cdots + b^p \varepsilon^p \equiv a^p + b^p \varepsilon^p \equiv a + b\varepsilon N^{\frac{p-1}{2}},$$

perchè, pel teorema di Fermat, $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1$; inoltre, essendo N non resto di p, $N^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$, quindi:

$$\alpha^p \equiv a - b\varepsilon = \bar{\alpha}.$$

Analogamente $\bar{\alpha}^p \equiv \alpha$, donde $\alpha^{p^2} \equiv \alpha$, e per conseguenza:

$$\alpha^{p^2-1} \equiv 1, \tag{3}$$

formola che costituisce la *generalizzazione del teorema di* Fermat.

Di qui segue che *la congruenza:*

$$(4) \qquad x^{p^2-1} \equiv 1 \pmod p$$

ha precisamente un numero di radici eguale al suo grado; infatti ad essa soddisfanno tutti i numeri complessi $a + b\varepsilon$ non congruenti a zero rispetto a p, e questi sono appunto $p^2 - 1$, potendo a, b assumere qualunque coppia di valori meno la coppia 0, 0.

Una conseguenza di questo teorema è che, *se q è un divisore di $p^2 - 1$, la congruenza:*

$$x^q \equiv 1 \pmod p$$

ha q radici. La dimostrazione è la stessa che pei numeri ordinari.

Una radice α della congruenza (4) può eventualmente essere radice di un'altra congruenza della forma:

$$x^r \equiv 1 \pmod p,$$

dove $r < p^2 - 1$. Si dimostra in modo ben noto che, se r è il minimo numero per cui $\alpha^r \equiv 1$, $p^2 - 1$ dev'essere multiplo di r. Si dice che il numero α *appartiene* all'esponente r; i numeri appartenenti all'esponente $p^2 - 1$ si chiamano *radici primitive* di p.

Se i numeri α_1, α_2 appartengono rispettivamente agli esponenti r_1, r_2 primi tra loro, il numero $\alpha = \alpha_1 \alpha_2^{-1}$ * *appartiene all'esponente $r = r_1 r_2$.*

* Con a^{-1} si denota, nella Teoria dei numeri, quel numero b che soddisfa alla congruenza:

$$ab \equiv 1 \pmod p;$$

Sia, per un certo numero s, $a^s \equiv 1$, quindi $a_1^s \equiv a_2^s$. Poniamo $a_1^s \equiv a_2^s \equiv b$. Se t_1 è il massimo comune divisore di r_1, s e t_2 quello di r_2, s, sarà:

$$a_1^{s\frac{r_1}{t_1}} = a_1^{r_1 \frac{s}{t_1}} \equiv 1, \quad a_2^{s\frac{r_2}{t_2}} = a_2^{r_2 \frac{s}{t_2}} \equiv 1,$$

ossia:

$$b^{\frac{r_1}{t_1}} \equiv b^{\frac{r_2}{t_2}} \equiv 1.$$

Ora r_1 ed r_2 sono primi tra loro, quindi lo stesso è di $\frac{r_1}{t_1}$, $\frac{r_2}{t_2}$, e però segue dalla relazione precedente:

$$b \equiv 1,$$

ossia:

$$a_1^s \equiv a_2^s \equiv 1,$$

donde risulta che s deve essere multiplo tanto di r_1 che di r_2. Dunque il minimo valore di s per cui $a^s \equiv 1$ è $s = r_1 r_2$.

Qualunque sia il numero primo p, esistono radici primitive di esso, anzi, più generalmente, *esistono numeri appartenenti a qualsiasi esponente che sia divisore di $p^2 - 1$.*

---

esso esiste sempre ed è determinato in modo unico rispetto al modulo p, quando p è primo ed a non è multiplo di p, o, più generalmente, quando a è primo con p.

Analogamente si denota con $c a^{-1}$ quel numero b che soddisfa alla congruenza:

$$ab \equiv c \pmod{p}.$$

Sia:

$$p^2 - 1 = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdot \ldots,$$

dove p_1, p_2, ... rappresentano fattori primi differenti. Se q è un divisore di $p^2 - 1$, sarà:

$$q = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdot \ldots,$$

dove:

$$s_1 \leqq r_1, \quad s_2 \leqq r_2, \ldots.$$

Poichè $p_1^{s_1}$ è un divisore di $p^2 - 1$, la congruenza:

$$x^{p_1^{s_1}} \equiv 1$$

ha $p_1^{s_1}$ radici; alcune di queste devono appartenere all'esponente $p_1^{s_1}$, giacchè, in caso contrario, esse sarebbero tutte radici della congruenza:

$$x^{p_1^{s_1-1}} \equiv 1.$$

Esistono dunque numeri appartenenti all'esponente $p_1^{s_1}$, e parimenti numeri appartenenti all'esponente $p_2^{s_2}$, etc. Mediante questi, e in virtù del teorema precedente, si possono costruire numeri appartenenti all'esponente q.

Sia in particolare $q = p + 1$, e $\boldsymbol{t}$ un numero appartenente a questo esponente; le radici della congruenza:

$$(5) \qquad x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$$

saranno:

$$(6) \qquad 1,\ \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t}^2,\ \ldots,\ \boldsymbol{t}^{p-1},\ \boldsymbol{t}^p \equiv \boldsymbol{t}^{-1}.$$

Dalla relazione generale $\boldsymbol{a}^p \equiv \overline{\boldsymbol{a}}$ trovata sopra segue:

$$\boldsymbol{t}^p \equiv \boldsymbol{t}^{-1} \equiv \overline{\boldsymbol{t}};$$

d'altra parte non può essere $\boldsymbol{t}^p \equiv \boldsymbol{t}$, giacchè in tal caso sarebbe $\boldsymbol{t}^{p-1} \equiv 1$, e $\boldsymbol{t}$ non apparterrebbe all'esponente $p+1$. Ne segue che $\boldsymbol{t}$ *non è reale,* sicchè, posto:

$$\boldsymbol{t} = c + d\varepsilon,$$

d non è nullo nè multiplo di p. Dopo ciò, dato un numero complesso qualunque:

$$\boldsymbol{a} = a + b\varepsilon,$$

può trovarsi un numero ordinario l tale che sia:

$$ld \equiv b \pmod p,$$

ed allora si ha:

$$\boldsymbol{a} \equiv a + ld\varepsilon = (a - lc) + l\boldsymbol{t} \pmod p,$$

sicchè ogni numero complesso $\boldsymbol{a}$ può porsi sotto la forma $h + k\boldsymbol{t}$.

Se $\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}} \equiv 1$, $\boldsymbol{a}$ *è una potenza di* $\boldsymbol{t}$. — Infatti, essendo $\overline{\boldsymbol{a}} \equiv \boldsymbol{a}^p$, si ha nel caso nostro $\boldsymbol{a}^{p+1} \equiv 1$, sicchè $\boldsymbol{a}$ è una radice della congruenza (5), e quindi una delle quantità (6).

Le sostituzioni lineari:

$$\xi' = \frac{\boldsymbol{a}\xi + \boldsymbol{b}}{\overline{\boldsymbol{b}}\xi + \overline{\boldsymbol{a}}}, \tag{7}$$

dove $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *sono due numeri complessi legati dalla relazione:*

$$\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{b}} \equiv 1 \pmod p,$$

formano un gruppo.

Infatti, se:

$$\xi' = \frac{\boldsymbol{a}'\xi + \boldsymbol{b}'}{\overline{\boldsymbol{b}}'\xi + \overline{\boldsymbol{a}}'}$$

è un'altra sostituzione della stessa natura, sicchè:

$$\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{a}}' - \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{b}}' \equiv 1 \pmod{p},$$

il prodotto delle due sostituzioni è:

$$\xi' = \frac{(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{b}})\xi + (\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{a}})}{(\overline{\boldsymbol{b}}'\boldsymbol{a} + \overline{\boldsymbol{a}}'\overline{\boldsymbol{b}})\xi + (\overline{\boldsymbol{b}}'\boldsymbol{b} + \overline{\boldsymbol{a}}'\overline{\boldsymbol{a}})},$$

e si ha:

$$(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{b}})(\overline{\boldsymbol{b}}'\boldsymbol{b} + \overline{\boldsymbol{a}}'\overline{\boldsymbol{a}}) - (\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{a}})(\overline{\boldsymbol{b}}'\boldsymbol{a} + \overline{\boldsymbol{a}}'\overline{\boldsymbol{b}})$$
$$= (\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{b}})(\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{a}}' - \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{b}}') \equiv 1.$$

La trasformata d'una sostituzione qualunque $\xi' = \boldsymbol{P}(\xi)$ *della forma* (7) *mediante la sostituzione:*

$$\xi' = \boldsymbol{A}(\xi) = \frac{-\xi + 1}{\varepsilon\xi + \varepsilon}$$

[che non appartiene al gruppo delle (7)] *è una sostituzione* $\xi' = P(\xi)$ *del gruppo* $G_{\mu(p)}$, *e la somma degli elementi estremi è eguale nelle due sostituzioni.*

Posto infatti:

$$\boldsymbol{a} = m + n\varepsilon, \quad \boldsymbol{b} = r + s\varepsilon,$$

si trova:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}(\xi) = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta},$$

dove:

$$\alpha = m - r, \quad \beta = -n - s, \quad \gamma = -N(n - s), \quad \delta = m + r;$$

inoltre:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{p}, \quad \alpha + \delta = \boldsymbol{a} + \overline{\boldsymbol{a}}.$$

Ne segue che *il gruppo delle sostituzioni* (7) *è oloedricamente isomorfo al gruppo* $G_{\mu(p)}$. Pertanto, per ciò che riguarda questioni puramente formali

(cioè indipendenti dalla natura delle operazioni di cui i gruppi constano), è indifferente considerare l'uno o l'altro dei due gruppi. Noi denoteremo il gruppo (7) con $\boldsymbol{G}_{\mu(p)}$.

109. Premesse queste nozioni, veniamo alla ricerca dei sottogruppi del gruppo $G_{\mu(p)}$.

Osserviamo anzitutto che, essendo p primo, si ha:

$$\mu(p) = \frac{p(p^2-1)}{2} \text{ *)}.$$

Cominciamo colla ricerca dei sottogruppi ciclici d'ordine p.

Uno di tali sottogruppi, G_p, si costruisce immediatamente; esso è formato, oltre che dall'identità, dalla sostituzione:

$$S(z) = z + 1$$

e dalle sue potenze 2^a, 3^a, ..., $(p-1)$-esima.

Per trovare altri sottogruppi ciclici, considereremo anzitutto quelli che sono equivalenti a G_p.

Sia $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ una sostituzione qualunque di $G_{\mu(p)}$; si ha (cfr. art. 91):

$$(1) \qquad P^{-1} S^r P = \begin{pmatrix} 1 - r\alpha\gamma & r\alpha^2 \\ -r\gamma^2 & 1 + r\alpha\gamma \end{pmatrix}.$$

Affinchè P sia permutabile con G_p, bisogna

*) La formola non sarebbe esatta per $p = 2$ (v. art. 106); però noi qui supponiamo p un numero primo *dispari*.

che la (1) sia una certa potenza S^s di S, e quindi che sia $\gamma \equiv 0$; ed è facile vedere che questa condizione è anche sufficiente. Ora, se $\gamma \equiv 0$, ne segue $\alpha\delta \equiv 1$, quindi α può assumere tutti i $p-1$ valori incongrui rispetto a p, e a ciascuno di questi corrisponde un unico valore di δ; β poi è arbitrario, e quindi può prendere p valori incongrui. In tutto adunque abbiamo $p(p-1)$ sostituzioni di $G_{\mu(p)}$ permutabili con G_p; ma queste sono 2 a 2 eguali, giacchè $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta\end{pmatrix}$ non sono che una sola sostituzione; quindi il numero delle sostituzioni diverse di $G_{\mu(p)}$ permutabili con G_p è $\frac{p(p-1)}{2}$. Ne segue (art. 13) che il numero dei sottogruppi equivalenti a G_p, compreso G_p stesso, è $\frac{p(p^2-1)}{2} : \frac{p(p-1)}{2}$ ossia $p+1$. Le sostituzioni di questi gruppi, meno l'identità, sono necessariamente tutte diverse fra loro; infatti, se due di essi avessero comune più di una sostituzione, il numero delle sostituzioni comuni, ossia l'ordine del sottogruppo comune, dovrebbe essere un divisore dell'ordine comune p dei due gruppi, che d'altra parte è un numero primo. Dunque il numero totale delle sostituzioni contenute nei $p+1$ sottogruppi equivalenti è $(p+1)(p-1)$, ossia p^2-1, oltre l'identità.

Se si indica in generale con σ la semisomma del primo e dell'ultimo elemento d'una sostituzione, risulta dalla (1) che per le sostituzioni dei sottogruppi considerati si ha $\sigma = 1$. Naturalmente può anche scriversi $\sigma = -1$, giacchè è lecito cambiare il segno di tutti gli elementi d'una sostituzione. Possiamo dire quindi che *per le sostituzioni del sottogruppo G_p e dei suoi equivalenti si ha $\sigma^2 = 1$.*

110. Determiniamo i sottogruppi ciclici d'ordine $\frac{p-1}{2}$.

Se a è una radice primitiva di p nel senso ordinario, la sostituzione del gruppo $G_{\mu(p)}$:

$$R \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

genera un gruppo ciclico $G_{\frac{p-1}{2}}$ d'ordine $\frac{p-1}{2}$; infatti si ha:

$$R^r \equiv \begin{pmatrix} a^r & 0 \\ 0 & a^{-r} \end{pmatrix},$$

e $a^r \not\equiv \pm 1$ per $r < \frac{p-1}{2}$, mentre:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (a^{-1})^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1,$$

sicchè la prima potenza di R che sia $\equiv 1$ è la $\left(\frac{p-1}{2}\right)$-esima.

Si trova (art. 26):

$$(1)\quad P^{-1}R^rP \equiv \begin{pmatrix} \alpha\delta a^r - \beta\gamma a^{-r} & -\alpha\beta(a^r - a^{-r}) \\ \gamma\delta(a^r - a^{-r}) & \alpha\delta a^{-r} - \beta\gamma a^r \end{pmatrix}.$$

Affinchè questa sostituzione sia una potenza di R, dev'essere anzitutto, quando $\alpha\beta$ e $\gamma\delta$ non sieno ambidue nulli:

$$a^r - a^{-r} \equiv 0,$$

ossia $a^{2r} \equiv 1$, che è impossibile per $r < \frac{p-1}{2}$. Dunque si ha $\alpha\beta \equiv 0$, $\gamma\delta \equiv 0$, cioè uno dei due casi seguenti:

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0, \quad \alpha\delta \equiv 1;$$
$$\alpha \equiv \delta \equiv 0, \quad \beta\gamma \equiv -1.$$

Corrispondentemente si ha:

$$P \equiv \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad P \equiv \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

La prima di queste è una potenza di R; infatti, poichè $1, a, a^2, \ldots, a^{p-2}$ è un sistema completo di resti rispetto a p, qualunque sia α, esiste un esponente s tale che $a^s \equiv \alpha$. La seconda è una sostituzione d'ordine 2; e di tali sostituzioni ve n'hanno $\frac{p-1}{2}$, cioè la metà del numero dei valori diversi e non $\equiv 0$ che può assumere α. Dunque $G_{\frac{p-1}{2}}$ è permutabile, oltre che colle proprie sostituzioni, con $\frac{p-1}{2}$ sostituzioni d'ordine 2; in tutto con $p-1$ sostituzioni. Ne segue che il numero

dei sottogruppi equivalenti a $G_{\frac{p-1}{2}}$, compreso questo stesso, è $\frac{p(p^2-1)}{2}:(p-1)$, ossia $\frac{p(p+1)}{2}$.

Si può dimostrare che questi sottogruppi non hanno due a due altra operazione comune che l'identità. Sieno R_1, R_2 le operazioni generatrici di due dei sottogruppi ciclici considerati, ed abbiano questi una operazione comune, sicchè sia:

$$R_1^r \equiv R_2^s .$$

Potrà scriversi:

$$R_1^r \equiv R_2^s = R_2^{-1} R_2^s R_2 \equiv R_2^{-1} R_1^r R_2 ,$$

sicchè la R_2 è permutabile col primo dei due sottogruppi, mentre essa non appartiene a questo, nè, per $p > 5$, è d'ordine 2 *, ciò che è impossibile.

Il numero totale delle sostituzioni diverse dei $\frac{p(p+1)}{2}$ sottogruppi è dunque, oltre l'identità,

$$\frac{p(p+1)}{2}\frac{p-3}{2}, \text{ ossia } \frac{p(p+1)(p-3)}{4}.$$

Per ciascuna di queste sostituzioni si ha [v. formola (1)]:

$$\sigma \equiv \frac{a^r + a^{-r}}{2},$$

* Per $p = 5$ il sottogruppo $G_{\frac{p-1}{2}}$ e i suoi equivalenti sono d'ordine 2, e perciò non possono avere altra sostituzione comune che l'identità.

quindi:

$$\sigma^2 - 1 \equiv \left(\frac{a^r - a^{-r}}{2}\right)^2,$$

che può scriversi genericamente:

$$\sigma^2 - 1 = R,$$

R indicando un resto quadratico di p.

111. Determiniamo ora i sottogruppi ciclici d'ordine $\frac{p+1}{2}$. Il processo è analogo a quello dell'art. prec., colla sostituzione di $\boldsymbol{t}$ ad a.

La sostituzione del gruppo $\boldsymbol{G}_{\mu(p)}$:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{t}^{-1} \end{pmatrix}$$

genera un sottogruppo $\boldsymbol{G}_{\frac{p+1}{2}}$ d'ordine $\frac{p+1}{2}$; infatti si ha:

$$\boldsymbol{R}^r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}^r & 0 \\ 0 & \boldsymbol{t}^{-r} \end{pmatrix},$$

e $\boldsymbol{t}^r \not\equiv \pm 1$ per $r < \frac{p+1}{2}$, mentre:

$$\boldsymbol{t}^{\frac{p+1}{2}} \equiv (\boldsymbol{t}^{-1})^{\frac{p+1}{2}} \equiv \pm 1,$$

sicchè la prima potenza di $\boldsymbol{R}$ che sia $\equiv 1$ è la $\left(\frac{p+1}{2}\right)$-esima. Se:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \overline{\boldsymbol{b}} & \overline{\boldsymbol{a}} \end{pmatrix},$$

si ha:

$$(1)\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{R}^{r}\boldsymbol{P}\equiv\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{t}^{r}-\boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{t}^{-r} & -\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{t}^{r}-\boldsymbol{t}^{-r}) \\ \overline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t}^{r}-\boldsymbol{t}^{-r}) & \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{t}^{-r}-\boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{t}^{r} \end{bmatrix}.$$

Perchè questa sostituzione sia una potenza di $\boldsymbol{R}$, dev'essere anzitutto, quando nè $\boldsymbol{a}$ nè $\boldsymbol{b}$ sia nullo:

$$\boldsymbol{t}^{r}-\boldsymbol{t}^{-r}\equiv 0,$$

ossia $\boldsymbol{t}^{2r}\equiv 1$, che è impossibile per $r<\frac{p+1}{2}$. Dunque dev'essere o $\boldsymbol{b}\equiv 0$ o $\boldsymbol{a}\equiv 0$. Nel primo caso si ha $\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}}\equiv 1$, quindi (art. 108) $\boldsymbol{a}$ è una potenza di $\boldsymbol{t}$, sicchè, posto $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{t}^{s}$, si ha:

$$\boldsymbol{P}\equiv\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}^{s} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{t}^{-s} \end{pmatrix}=\boldsymbol{R}^{s},$$

ossia $\boldsymbol{P}$ appartiene a $\boldsymbol{G}_{\frac{p+1}{2}}$. Nel secondo caso si ha $\boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{b}}\equiv -1$, e la:

$$P\equiv\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{b} \\ \overline{\boldsymbol{b}} & 0 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

è un'operazione di periodo 2. Di tali operazioni ve n'hanno $\frac{p+1}{2}$, cioè la metà del numero delle soluzioni della congruenza $\boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{b}}\equiv -1$, numero che è appunto $p+1$ *. Dunque $\boldsymbol{G}_{\frac{p+1}{2}}$ è permutabile,

---

*) Se $\boldsymbol{k}$ è una soluzione di questa congruenza, tutte e sole le soluzioni di essa sono:

$$\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\boldsymbol{t},\quad \boldsymbol{k}\boldsymbol{t}^{2},\ \ldots,\ \boldsymbol{k}\boldsymbol{t}^{p};$$

oltre che colle proprie sostituzioni, con $\frac{p+1}{2}$ sostituzioni d'ordine 2; in tutto con $p+1$ sostituzioni. Ne segue che il numero dei sottogruppi equivalenti a $G_{\frac{p+1}{2}}$, ossia a $G_{\frac{p+1}{2}}$, compreso questo gruppo stesso, è $\frac{p(p^2-1)}{2}:(p+1)$, ossia $\frac{p(p-1)}{2}$.

Si può dimostrare come prima che due qualunque di questi sottogruppi non hanno alcuna sostituzione comune oltre l'identità. Ne segue che il numero totale delle sostituzioni differenti contenute nei $\frac{p(p-1)}{2}$ sottogruppi considerati è, oltre l'identità, $\frac{p(p-1)}{2}\frac{p-1}{2}$, ossia $\frac{p(p-1)^2}{4}$.

Per ciascuna di queste sostituzioni si ha [v. formola (1)]:

$$\sigma \equiv \frac{t^r + t^{-r}}{2},$$

quindi:

$$\sigma^2 - 1 \equiv \left(\frac{t^r - t^{-r}}{2}\right)^2.$$

---

infatti, detta k' un'altra soluzione, dalle:

$$k\overline{k} \equiv -1, \quad k'\overline{k'} \equiv -1$$

segue:

$$(k'k^{-1})(\overline{k'}\,\overline{k}^{-1}) \equiv 1,$$

quindi (art. 108) $k'k^{-1} = t^s$, ossia $k' = kt^s$.

Ora $t^r - t^{-r}$ è la differenza di due numeri coniugati, e quindi è eguale al prodotto di un numero ordinario per ε:

$$t^r - t^{-r} = l\varepsilon;$$

ne segue:

$$\sigma^2 - 1 \equiv \frac{l^2}{4}\varepsilon^2 \equiv \frac{l^2}{4}N,$$

o più semplicemente, indicando con N il non resto $\frac{l^2}{4}N$:

$$\sigma^2 - 1 = N,$$

formola che vale anche per le sostituzioni di $G_{\frac{p+1}{2}}$ e dei suoi equivalenti, giacchè (art. 108) σ ha lo stesso valore per le sostituzioni corrispondenti dei due gruppi $G_{\mu(p)}$, $G_{\mu(p)}$.

112. Poichè $\sigma^2 - 1 \equiv 0$ per le sostituzioni dei gruppi ciclici d'ordine p, è un resto di p diverso da zero per quelle dei gruppi ciclici d'ordine $\frac{p-1}{2}$, è un non resto di p per quelle dei gruppi ciclici d'ordine $\frac{p+1}{2}$, i gruppi delle tre specie non possono avere sostituzioni comuni oltre l'identità. Ne segue che il numero totale delle sostituzioni in essi contenute è, compresa l'identità:

$$1 + (p^2 - 1) + \frac{p(p+1)(p-3)}{4} + \frac{p(p-1)^2}{4} = \frac{p(p^2-1)}{2}.$$

Questi gruppi presi insieme contengono dunque tutte le sostituzioni di $G_{\mu(p)}$, e però $G_{\mu(p)}$ non contiene altri sottogruppi ciclici oltre quelli trovati e i loro sottogruppi.

La formazione di questi ultimi non presenta alcuna difficoltà.

Anzitutto G_p e i suoi equivalenti non ne contengono alcuno, essendo p primo.

Quanto a $G_{\frac{p-1}{2}}$ o ad uno dei suoi equivalenti, se t è un divisore di $\frac{p-1}{2}$, R^t genererà un sottogruppo ciclico di ordine $\frac{p-1}{2t}$; e lo stesso può dirsi di $G_{\frac{p+1}{2}}$ e dei suoi equivalenti.

In particolare, secondochè $p \equiv \pm 1 \pmod 3$ *, ossia secondochè il numero $\frac{p-1}{2}$ o il numero $\frac{p+1}{2}$ è divisibile per 3, il sottogruppo $G_{\frac{p\mp1}{2}}$ e i suoi equivalenti conterranno ciascuno un sottogruppo ciclico d'ordine 3. Il numero dei sottogruppi ciclici d'ordine 3 di $G_{\mu(p)}$ è dunque $\frac{p(p\pm1)}{2}$, e, poichè ogni gruppo ciclico d'ordine 3 contiene 2

* Lasciamo da parte il caso $p = 3$, a cui corrisponde il gruppo tetraedrico, già studiato in tutti i suoi particolari.

sostituzioni d'ordine 3, il numero delle sostituzioni d'ordine 3 di $G_{\mu(p)}$ è $p(p \pm 1)$.

Consideriamo il caso del segno superiore. Ogni sostituzione di $G_{\frac{p-1}{2}}$ ha la forma $\begin{pmatrix} a^r & 0 \\ 0 & a^{-r} \end{pmatrix}$; perchè essa sia d'ordine 3 dev'essere $a^{3r} \equiv \mp 1 \pmod p$, ossia $a^{3r} \pm 1 \equiv 0 \pmod p$, che può scriversi:

$$(a^r \pm 1)(a^{2r} \mp a^r + 1)$$
$$= (a^r \pm 1) a^r (a^r + a^{-r} \mp 1) \equiv 0 \pmod p.$$

Ora i fattori a^r, $a^r \pm 1$ non possono essere $\equiv 0$, quindi:

$$a^r + a^{-r} \equiv \pm 1 \pmod p,$$

ossia $2\sigma \equiv \pm 1 \pmod p$. — Parimenti nell'altro caso, perchè la sostituzione $\begin{pmatrix} t^r & 0 \\ 0 & t^{-r} \end{pmatrix}$ di $G_{\frac{p+1}{2}}$ sia d'ordine 3 dev'essere $t^{3r} \equiv \mp 1 \pmod p$, donde come prima $t^r + t^{-r} \equiv \pm 1 \pmod p$, ossia $2\sigma \equiv \pm 1 \pmod p$. — Il risultato, che vale anche per la corrispondente sostituzione di $G_{\mu(p)}$ (v. art. 108, 111), si estende immediatamente a tutte le sostituzioni d'ordine 3 di $G_{\mu(p)}$, considerando che — come si vede facilmente — esse appartengono a sottogruppi equivalenti (d'ordine 3) di sottogruppi equivalenti $\left(\text{d'ordine } \frac{p \mp 1}{2}\right)$, e quindi (art. 26) σ ha per esse lo stesso valore. — Questa relazione $2\sigma \equiv \pm 1 \pmod p$ è caratteristica per le sostituzioni di $G_{\mu(p)}$ d'ordine 3. Infatti dalla:

$$a^r + a^{-r} \equiv \pm 1$$

segue, elevando al cubo:

$$a^{3r} + a^{-3r} + 3(a^r + a^{-r}) \equiv \pm 1,$$

ossia:

$$a^{3r} + a^{-3r} \pm 2 \equiv 0,$$

od ancora:

$$a^{6r} + 1 \pm 2a^{3r} \equiv 0,$$

donde:

$$a^{3r} \equiv \mp 1;$$

ed analogamente si può ragionare per l'altro caso.

Così pure, secondochè $p \equiv \pm 1 \pmod 4$, ossia secondochè $\frac{p-1}{2}$ o $\frac{p+1}{2}$ è pari, $G_{\frac{p\mp1}{2}}$ contiene un sottogruppo ciclico d'ordine 2. Il numero dei sottogruppi ciclici d'ordine 2 di $G_{\mu(p)}$ è dunque $\frac{p(p\pm1)}{2}$, e tale è anche il numero delle sostituzioni d'ordine 2. — Nel caso del segno superiore, perchè la sostituzione $\begin{pmatrix} a^r & 0 \\ 0 & a^{-r} \end{pmatrix}$ di $G_{\frac{p-1}{2}}$ sia d'ordine 2, dev'essere $a^{2r} \equiv -1$ (giacchè, se fosse $a^{2r} \equiv +1$, dovrebbe essere $a^r \equiv a^{-r} \equiv \pm 1$, sicchè la sostituzione considerata sarebbe l'identità), ossia $a^r + a^{-r} \equiv 0$, od ancora $\sigma \equiv 0$; e lo stesso nell'altro caso. La relazione è caratteristica per le sostituzioni d'ordine 2, giacchè dalla:

$$a^r + a^{-r} \equiv 0$$

si deduce reciprocamente $a^{2r} \equiv -1$.

113. Passiamo alla costruzione dei sottogruppi non ciclici di $G_{\mu(p)}$.

Anzitutto consideriamo il gruppo massimo in cui il sottogruppo G_p già studiato (art. 109) è contenuto come sottogruppo invariante. Esso, come si è veduto, è d'ordine $\frac{p(p-1)}{2}$ e consta di sostituzioni della forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ dove β è arbitrario ed α è soggetto alla sola condizione di non essere $\equiv 0$. Presa una tra esse per cui $\beta \equiv 0$ e α è radice primitiva di p, questa genera il gruppo ciclico $G_{\frac{p-1}{2}}$ (art. 110), e insieme a questo sono contenuti in $G_{\frac{p(p-1)}{2}}$ i suoi $p-1$ equivalenti $S^{-r}\, G_{\frac{p-1}{2}} S^r$, che sono tutti diversi (giacchè, come è facile verificare, $G_{\frac{p-1}{2}}$ ed S non sono permutabili). Oltre a G_p, a questi p gruppi ciclici d'ordine $\frac{p-1}{2}$ e ai sottogruppi in essi contenuti, $G_{\frac{p(p-1)}{2}}$ non contiene altri sottogruppi ciclici; infatti il numero delle sostituzioni diverse comprese nei gruppi accennati è:

$$1+(p-1)+p\left[\frac{p-1}{2}-1\right]=\frac{p(p-1)}{2},$$

ossia è eguale al numero totale delle sostituzioni di $G_{\frac{p(p-1)}{2}}$.

Il sottogruppo $G_{\frac{p(p-1)}{2}}$, non essendo — per la sua stessa definizione — permutabile che colle proprie sostituzioni, fa parte di un sistema di

$$\frac{p(p^2-1)}{2} : \frac{p(p-1)}{2} = p+1$$

sottogruppi equivalenti di $G_{\mu(p)}$. Questi sottogruppi diconsi *emimetaciclici*.

Se t è un divisore di $\frac{p-1}{2}$, dal sottogruppo ciclico $G_{\frac{p-1}{2t}}$ (art. 112) possiamo ottenere come testè un sottogruppo non ciclico $G_{\frac{p(p-1)}{2t}}$ di $G_{\mu(p)}$.

I sottogruppi ora costruiti sono i soli contenenti un sottogruppo ciclico d'ordine p. Per dimostrare questo, basta far vedere che i soli sottogruppi di $G_{\mu(p)}$ contenenti G_p sono $G_{\frac{p(p-1)}{2}}$ e qualche suo sottogruppo.

Supponiamo che sia G_q un sottogruppo di $G_{\mu(p)}$ diverso da $G_{\frac{p(p-1)}{2}}$ e non contenuto in esso, e contenente G_p. Il gruppo G_q conterrà almeno una sostituzione $Q \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in cui $\gamma \not\equiv 0$, quindi, poichè S appartiene a G_p e perciò a G_q, apparterrà pure a G_q la sostituzione:

$$S^{(1-\delta)\gamma^{-1}} Q S^{(1-\alpha)\gamma^{-1}} = Q_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix},$$

e così la sostituzione:

$$Q_1^{-\Upsilon^{-1}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e infine la sostituzione:

$$S\,Q_1^{-\Upsilon^{-1}}\,S \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = T.$$

Dunque G_q contiene S e T, e perciò deve coincidere con $G_{\mu(p)}$.

114. Consideriamo ora il gruppo delle sostituzioni di $G_{\mu(p)}$ permutabili con $G_{\frac{p-1}{2}}$. Esso consta delle sostituzioni di $G_{\frac{p-1}{2}}$ ed inoltre di altre $\frac{p-1}{2}$ sostituzioni d'ordine 2; ed è manifesto che le $p-1$ sostituzioni formano un gruppo diedrico. Di tali gruppi ve n'hanno $\frac{p(p+1)}{2}$, ed essi sono tutti equivalenti. Analogamente, partendo da $G_{\frac{p+1}{2}}$ si trovano $\frac{p(p-1)}{2}$ gruppi diedrici equivalenti d'ordine $p+1$.

La ricerca dei sottogruppi contenuti in questi gruppi diedrici non presenta alcuna difficoltà.

Noi dobbiamo fissare particolarmente la nostra attenzione sui loro sottogruppi trirettangoli.

Sia dapprima $p \equiv 1 \pmod 4$. In questo caso il gruppo diedrico G_{p-1} contiene l'operazione

$R^{\frac{p-1}{4}}$ che è di ordine 2; inoltre, il poligono a cui si riduce il poliedro avendo un numero pari $\frac{p-1}{2}$ di lati, i suoi assi di simmetria sono due a due ortogonali, sicchè abbiamo $\frac{p-1}{4}$ coppie di assi di simmetria ortogonali (assi equatoriali) formanti ciascuna una terna ortogonale coll'asse della rotazione R (asse polare). Le due rotazioni di ampiezza π aventi per assi due assi ortogonali e la rotazione $R^{\frac{p-1}{4}}$ formano dunque, insieme all'identità, un gruppo trirettangolo, e di tali gruppi ne abbiamo $\frac{p-1}{4}$. Essi sono tutti equivalenti se $\frac{p-1}{4}$ è dispari, perchè ognuna delle coppie di assi testè considerate consta d'una mediana e d'una diagonale del poligono, mentre, se $\frac{p-1}{4}$ è pari, metà delle coppie consta di due mediane e metà di due diagonali, sicchè i gruppi trirettangoli si dividono in due sistemi di $\frac{p-1}{8}$ gruppi equivalenti.

Il sottogruppo G_{p-1} appartiene ad un sistema di $\frac{p(p+1)}{2}$ sottogruppi equivalenti, quindi in tutto si hanno $\frac{p-1}{4}\frac{p(p+1)}{2}$ sottogruppi trirettangoli.

Ma è evidente che ciascuno di questi figura ripetuto tre volte, perchè ciascuno degli assi delle sue tre rotazioni funziona a sua volta come asse polare. Quindi il numero dei sottogruppi trirettangoli di $G_{\mu(p)}$ è $\frac{p(p^2-1)}{24}$; ed essi sono tutti equivalenti o si dividono in due sistemi di sottogruppi equivalenti secondochè $p \equiv 5$ o $p \equiv 1 \pmod 8$.

Sia invece $p \equiv -1 \pmod 4$. Con un ragionamento del tutto analogo si trova che il numero dei sottogruppi trirettangoli è $\frac{1}{3} \frac{p+1}{4} \frac{p(p-1)}{2}$, ossia ancora $\frac{p(p^2-1)}{24}$, e che essi formano uno o due sistemi di sottogruppi equivalenti secondochè $p \equiv 3$ o $p \equiv 7 \pmod 8$.

Riassumendo, si hanno in tutti i casi $\frac{p(p^2-1)}{24}$ sottogruppi trirettangoli, i quali formano uno o due sistemi di sottogruppi equivalenti secondochè $p \equiv \pm 3$ o $p \equiv \pm 1 \pmod 8$.

Potrebbe supporsi che nel caso $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, pur non essendo equivalenti tra loro tutti i sottogruppi trirettangoli di G_{p-1} o di G_{p+1}, essi, considerati come sottogruppi di $G_{\mu(p)}$, sieno equivalenti. Vogliamo dimostrare che ciò non è possibile.

Supposti i $\frac{p(p^2-1)}{24}$ sottogruppi trirettangoli

tutti equivalenti, ciascuno di essi (art. 13) è permutabile con $\frac{p(p^2-1)}{2} : \frac{p(p^2-1)}{24} = 12$ sostituzioni formanti un certo gruppo G_{12}, di cui il gruppo trirettangolo considerato G_4 è un sottogruppo invariante. Supponiamo che G_4 sia uno dei gruppi trirettangoli contenuti nel gruppo ciclico $G_{p\pm1}$; le sostituzioni di G_4 saranno:

$$1,\ R^{\frac{p\mp1}{4}},\ P,\ PR^{\frac{p\mp1}{4}},$$

P essendo una certa sostituzione d'ordine 2. Ora, se $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, posto:

$$R^{\frac{p\mp1}{8}} = Y,$$

il gruppo diedrico d'ordine 8:

$$1,\ Y,\ Y^2,\ Y^3,\ P,\ PY,\ PY^2,\ PY^3$$

consta di sostituzioni permutabili con G_4, quindi esso deve essere contenuto in G_{12}, ciò che è impossibile.

Si è veduto che le sostituzioni d'ordine 2 di $G_{\mu(p)}$ sono $\frac{p(p\pm1)}{2}$, e che R, e quindi ogni altra di tali sostituzioni, entra in $\frac{p\mp1}{4}$ sottogruppi trirettangoli. Osservando pertanto che ogni gruppo trirettangolo contiene 3 sostituzioni d'ordine 2, il numero totale dei gruppi trirettangoli risulta:

$$\frac{1}{3}\frac{p\mp1}{4}\frac{p(p\pm1)}{2} = \frac{p(p^2-1)}{24},$$

cioè eguale a quello già trovato. Ne segue che oltre i sottogruppi trirettangoli considerati non ve ne sono altri.

115. Abbiamo notato poc'anzi che, quando i $\frac{p(p^2-1)}{24}$ sottogruppi trirettangoli sono equivalenti tra loro [cioè quando $p \equiv \pm 3 \pmod 8$], uno di tali sottogruppi G_4 è permutabile con 12 sostituzioni; il gruppo G_{12} formato da queste contiene G_4 come sottogruppo invariante. Sieno 1, X_1, X_2, X_3 le sostituzioni di G_4; quelle di G_{12} potranno scriversi così:

$$\begin{array}{cccc} 1, & X_1, & X_2, & X_3, \\ Z_1, & Z_1X_1, & Z_1X_2, & Z_1X_3, \\ Z_2, & Z_2X_1, & Z_2X_2, & Z_2X_3. \end{array}$$

Poichè G_4 è sottogruppo invariante di G_{12}, si conclude con un ragionamento già fatto (art. 84) che G_{12} si riduce, a meno di sostituzioni di G_4, ad un gruppo G_3 di ordine 3, necessariamente ciclico. Indicando dunque con $\backsimeq$ la congruenza a meno di sostituzioni di G_4, avremo:

$$Z_1^3 \backsimeq Z_2^3 \backsimeq 1, \quad Z_1^2 \backsimeq Z_2,$$

ossia:

$$Z_1^3 \equiv 1 \quad \text{o} \quad Z_1^3 \equiv X_i,$$

donde in ogni caso:

$$Z_1^6 \equiv 1,$$

sicchè G_{12} contiene una sostituzione Z_1^2 di ordine 3.

Poniamo:

$$Z_1^2 = Z_3, \quad Z_3^2 = Z_4.$$

Invece che nella tabella precedente, le sostituzioni di G_{12} potranno disporsi in quella che segue:

$$\begin{array}{cccc} 1, & X_1, & X_2, & X_3, \\ Z_3, & Z_3 X_1, & Z_3 X_2, & Z_3 X_3, \\ Z_4, & Z_4 X_1, & Z_4 X_2, & Z_4 X_3. \end{array}$$

Si ha:

$$(Z_3 X_i)^3 \cong 1, \quad (Z_4 X_i)^3 \cong 1, \quad (Z_3 X_i)^2 \cong Z_4,$$

quindi:

$$(Z_3 X_1)^3 \equiv 1 \quad \text{o} \quad (Z_3 X_1)^3 \equiv X_h,$$

donde in ogni caso:

$$[(Z_3 X_1)^2]^3 \equiv 1.$$

Ma:

$$(Z_3 X_1)^2 \equiv Z_4 X_k,$$

quindi:

$$(Z_4 X_h)^3 \equiv 1.$$

Questa relazione può anche scriversi un po' diversamente; infatti $Z_4 X_h$, elemento della terza linea della tabella, è eguale al prodotto di una delle X, per es. X_l, per Z_4, sicchè può anche scriversi:

$$(X_l Z_4)^3 \equiv 1.$$

Dalle:

$$Z_4^3 \equiv 1, \quad X_l^2 \equiv 1, \quad (X_l Z_4)^3 \equiv 1$$

segue (art. 104) che il gruppo G_{12} è sostanzialmente identico a $G_{[3]}$, cioè che esso è un gruppo tetraedrico.

Poichè ogni gruppo tetraedrico contiene un solo sottogruppo trirettangolo invariante, il numero dei sottogruppi tetraedrici di $G_{\mu(p)}$ è $\frac{p(p^2-1)}{24}$. Essi sono tutti equivalenti, nè esistono oltre ad essi altri sottogruppi tetraedrici (giacchè non esistono altri sottogruppi trirettangoli).

116. Se $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, un gruppo trirettangolo G_4 appartiene ad un sistema di $\frac{p(p^2-1)}{48}$ sottogruppi equivalenti, quindi è permutabile con $\frac{p(p^2-1)}{2} : \frac{p(p^2-1)}{48} = 24$ sostituzioni; il gruppo G_{24} da esse formato contiene G_4 come sottogruppo invariante. Sieno 1, $X_1 \equiv R^{\frac{p \mp 1}{4}}$, X_2, X_3 le sostituzioni di G_4; è noto che $X_1 X_2 = X_3$, inoltre si è osservato (art. 114) che le sostituzioni permutabili con G_4:

$$1, \quad Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3,$$
$$X_2, \quad Y_1 X_2, \quad Y_1^2 X_2 = X_3, \quad Y_1^3 X_2 = Y_1 X_3,$$

dove $Y_1 \equiv X_1^{\frac{1}{2}} \equiv R^{\frac{p \mp 1}{8}}$, formano un gruppo diedrico G_8 di cui G_4 è sottogruppo invariante. Poichè G_8 è sottogruppo di G_{24}, si trova nel modo solito che G_{24} deve contenere una sostituzione Z di ordine 3; questa, combinata con G_4, dà un sottogruppo tetraedrico G_{12} di G_{24}. Ora G_{24} contiene altri 2 sottogruppi analoghi a G_8, i quali si

costruirebbero prendendo, invece di Y_1, $Y_2 \equiv X_2^{\frac{1}{2}}$ o $Y_3 \equiv X_3^{\frac{1}{2}}$, quindi contiene 9 sostituzioni d'ordine 2, e cioè:

$$X_1, X_2, X_3, Y_1X_2, Y_1X_3, Y_2X_1, Y_2X_3, Y_3X_1, Y_3X_2$$

D'altra parte, se $Z_i (i = 1, 2, \ldots, 8)$ sono le 8 sostituzioni d'ordine 3 di G_{12}, non tutti i prodotti $Z_i Y_1^{-1}$ possono essere d'ordine diverso da 2, giacchè, se ciò fosse, resterebbero al più 7 sostituzioni d'ordine 2, mentre sappiamo che esse sono 9. Indichiamo con $Z_h Y_1^{-1} = W$ uno dei prodotti considerati d'ordine 2, sicchè:

$$Z_h = W Y_1;$$

dalle relazioni:

$$Y_1^4 \equiv 1, \quad W^2 \equiv 1, \quad (W Y_1)^3 = 1$$

segue (art. 104) che G_{24} coincide con $G_{[4]}$, cioè è un gruppo ottaedrico.

I gruppi ottaedrici sono $\dfrac{p(p^2-1)}{24}$, e si dividono in due sistemi di sottogruppi equivalenti; oltre ad essi non esistono altri sottogruppi ottaedrici.

I sottogruppi emimetaciclici, diedrici, tetraedrici ed ottaedrici ora trovati non conducono a sottogruppi più ampi, essendo permutabili soltanto colle proprie sostituzioni.

117. Ci proponiamo ora di ricercare se il gruppo $G_{\mu(p)}$ contenga sottogruppi icosaedrici. Per-

chè ciò sia possibile essendo $p > 5$ (per $p = 5$ $G_{\mu(p)}$ è lo stesso gruppo icosaedrico), deve $\frac{p^2 - 1}{2}$ essere multiplo di 5, cioè dev'essere $p \equiv \pm 1$ (mod 10).

Sia dapprima $p \equiv 1 \pmod{10}$. Allora $G_{\frac{p-1}{2}}$ contiene 4 sostituzioni d'ordine 5, e cioè $H \equiv R^{\frac{p-1}{10}}$, H^2, H^3, H^4. Inoltre può trovarsi in $G_{\mu(p)}$ una sostituzione Z d'ordine 2 tale che ZH sia d'ordine 3. Poniamo infatti:

$$Z \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \frac{p-1}{10} = r;$$

avremo:

$$ZH \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^r & 0 \\ 0 & a^{-r} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha a^r & \beta a^r \\ \gamma a^{-r} & \delta a^{-r} \end{pmatrix}.$$

Se Z è d'ordine 2 e ZH d'ordine 3, sarà (art. 112):

$$\alpha + \delta \equiv 0, \quad \alpha a^r + \delta a^{-r} \equiv 1 \pmod{p} \text{ *},$$

quindi:

$$\alpha(a^r - a^{-r}) \equiv 1 \pmod{p},$$

relazione che determina α, non potendo essere $a^r - a^{-r} \equiv 0$ senza che la H si riduca all'identità. Si ha poi:

$$\beta\gamma \equiv -1 + \alpha\delta \equiv -1 - \alpha^2 \pmod{p},$$

*) È inutile scrivere al secondo membro ± 1, giacchè noi possiamo fissare ad arbitrio il segno di α.

quindi:

$$\beta\gamma(a^r - a^{-r})^2 \equiv -(a^r - a^{-r})^2 - \alpha^2(a^r - a^{-r})^2$$
$$\equiv -(a^r - a^{-r})^2 - 1 = -[a^{2r} + a^{-2r} - 1].$$

Quest'ultima espressione non può essere $\equiv 0$, giacchè, se ciò fosse, si avrebbe:

$$a^{2r} + a^{-2r} \equiv 1 \pmod p,$$

e quindi (art. 112) H^2 sarebbe d'ordine 3. Dunque la precedente relazione ci dà, per ogni valore arbitrario di β non divisibile per p, un corrispondente valore di γ, e però possiamo determinare $p - 1$ sostituzioni Z tali che:

$$Z^2 \equiv 1, \quad (ZH)^3 \equiv 1.$$

Da queste relazioni e dalla $H^5 \equiv 1$ segue (articolo 104) che il sottogruppo di $G_{\mu(p)}$ generato dalle H, Z coincide con $G_{[5]}$, ossia è icosaedrico.

Poichè $G_{\frac{p-1}{2}}$ contiene 4 sostituzioni d'ordine 5, e per ciascuna di queste si possono determinare $p - 1$ sostituzioni corrispondenti d'ordine 2, si ottengono $4(p - 1)$ sottogruppi icosaedrici; e, tenuto conto che $G_{\frac{p-1}{2}}$ fa parte d'un sistema di $\frac{p(p+1)}{2}$ sottogruppi equivalenti, si conclude che il numero totale dei sottogruppi icosaedrici di $G_{\mu(p)}$ è $4(p - 1)\frac{p(p+1)}{2}$, ossia $2p(p^2 - 1)$.

Alla medesima conclusione si giunge nel caso di $p \equiv -1 \pmod{10}$.

Però questi sottogruppi non sono tutti diversi; il numero dei sottogruppi differenti si ottiene dividendo $2p(p^2-1)$ per il numero delle coppie di sostituzioni analoghe ad H, Z contenute in un gruppo icosaedrico. Vogliamo determinare questo numero.

Sia S la nota sostituzione modulare, che, considerata come appartenente al gruppo icosaedrico $G_{[5]} = G_{60}$, è d'ordine 5, e $Z \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ una sostituzione d'ordine 2 del gruppo stesso tale che ZS sia d'ordine 3. Poichè:

$$ZS \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \pmod 5,$$

dev'essere (art. 112):

$$\alpha+\delta \equiv 0, \quad \alpha+\gamma+\delta \equiv 1 \pmod 5 \ ^*;$$

di qui e dalla:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod 5$$

segue:

$$\delta \equiv -\alpha, \quad \gamma \equiv 1, \quad \beta \equiv -1-\alpha^2 \pmod 5,$$

sicchè α è arbitrario, cioè può prendere 5 valori diversi, ma, fissato α, sono determinati β e δ, mentre γ è sempre $\equiv 1$.

Dunque alla sostituzione S corrispondono 5 sostituzioni Z, e lo stesso evidentemente può dirsi di ognuna delle 24 sostituzioni d'ordine 5 contenute

*) V. la nota precedente.

in G_{60}. Pertanto il numero cercato è $5 \times 24 = 120$, e il numero dei sottogruppi icosaedrici differenti di $G_{\mu(p)}$ è $\frac{p(p^2-1)}{60}$.

Come dimostreremo fra poco, $G_{\mu(p)}$ non ammette alcun sottogruppo contenente un sottogruppo icosaedrico. Ne segue che un sottogruppo icosaedrico di $G_{\mu(p)}$ è permutabile soltanto colle proprie sostituzioni, e quindi appartiene ad un sistema di:

$$\frac{p(p^2-1)}{2} : 60 = \frac{p(p^2-1)}{120}$$

sottogruppi equivalenti. Dunque i $\frac{p(p^2-1)}{60}$ sottogruppi icosaedrici si dividono in due sistemi di $\frac{p(p^2-1)}{120}$ sottogruppi equivalenti, sistemi che per brevità indichiamo con A e B.

Poichè il numero dei sottogruppi icosaedrici di $G_{\mu(p)}$ è $\frac{p(p^2-1)}{60}$ e quello dei sottogruppi tetraedrici è $\frac{p(p^2-1)}{24}$, e poichè (art. 67) ogni gruppo icosaedrico contiene 5 gruppi tetraedrici, il numero dei sottogruppi icosaedrici contenenti un medesimo sottogruppo tetraedrico è:

$$5 . \frac{p(p^2-1)}{60} : \frac{p(p^2-1)}{24},$$

cioè 2.

Ricordando inoltre che i 5 sottogruppi tetraedrici d'un gruppo icosaedrico sono equivalenti, e che i $\frac{p(p^2-1)}{24}$ sottogruppi tetraedrici di $G_{\mu(p)}$ sono tutti equivalenti o si scindono in due sistemi di sottogruppi equivalenti secondochè $p \equiv \pm 3$ o $p \equiv \pm 1$ (mod 8), ne risulta che nel primo caso tutti i $\frac{p(p^2-1)}{24}$ sottogruppi tetraedrici dovranno figurare in ambi i sistemi A e B, mentre nel secondo $\frac{p(p^2-1)}{48}$ figureranno nel sistema A e i rimanenti $\frac{p(p^2-1)}{48}$ nel sistema B. Quindi i due sottogruppi icosaedrici in cui è contenuto un medesimo sottogruppo tetraedrico non sono equivalenti se $p \equiv \pm 3$, lo sono invece se $p \equiv \pm 1$ (mod 8).

118. Dimostreremo ora che $G_{\mu(p)}$ non ammette altri sottogruppi oltre quelli trovati.

Poichè i sottogruppi contenenti un gruppo ciclico d'ordine p furono già completamente determinati (art. 113), possiamo limitarci a considerare un sottogruppo G_q non contenente alcun sottogruppo ciclico d'ordine p, sicchè q dovrà essere un divisore di $\frac{p^2-1}{2}$. Si è veduto che i soli sottogruppi ciclici d'ordine diverso da p sono quelli il cui ordine è $\frac{p \mp 1}{2}$ o un divisore d'uno di que-

sti due numeri. Se quindi si denota con G_{r_1} un sottogruppo ciclico di G_q avente la proprietà, che non esiste alcun altro sottogruppo ciclico di G_q il quale lo contenga, r_1 sarà un divisore di $\frac{p-1}{2}$ o di $\frac{p+1}{2}$ e G_{r_1} sarà il massimo sottogruppo comune a G_q e a $G_{\frac{p\mp 1}{2}}$. Le sostituzioni di G_{r_1} permutabili con $G_{\frac{p\mp 1}{2}}$ sono, come si è trovato, quelle del gruppo stesso, e inoltre $\frac{p\mp 1}{2}$ sostituzioni d'ordine due, che si ottengono moltiplicando una di esse per le sostituzioni di $G_{\frac{p\mp 1}{2}}$. A seconda quindi che G_q contiene o no una di tali sostituzioni, la quale sia permutabile con G_{r_1}, le sostituzioni di G_q permutabili con G_{r_1} saranno $2r_1$ oppure r_1. In generale indichiamo con $\sigma_1 r_1$ il numero di tali sostituzioni, potendo σ_1 avere i valori 1 e 2; G_{r_1} appartiene ad un sistema di $\frac{q}{\sigma_1 r_1}$ sottogruppi equivalenti, i quali, presi insieme, contengono, oltre l'identità, $\frac{(r_1-1)q}{\sigma_1 r_1}$ sostituzioni diverse.

Se oltre a queste G_q contiene altre sostituzioni, cerchiamo nell'insieme di queste (a cui aggiungeremo l'identità) un sottogruppo G_{r_2} analogo

a G_{r_1}, e così continuiamo sino ad aver esaurite le sostituzioni di G_q. Avremo così scomposto G_q in più sistemi di sottogruppi equivalenti rispettivamente a $G_{r_1}, G_{r_2}, \ldots, G_{r_\lambda}$, e potremo concludere:

$$q = 1 + \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{(r_i - 1)q}{\sigma_i r_i},$$

ossia:

$$q = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{r_i - 1}{\sigma_i r_i}}. \tag{1}$$

Un'altra relazione, affatto evidente, è:

$$q \geq \sigma_i r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda), \tag{2}$$

giacchè, se G_q deve contenere $\sigma_i r_i$ sostituzioni permutabili con G_{r_i}, il suo ordine non può essere inferiore a $\sigma_i r_i$.

Finalmente una terza relazione si ottiene come segue. Sieno G_{r_h}, G_{r_k} d'ordine dispari, e denotiamo con X_h, X_k le loro sostituzioni generatrici. I sottogruppi:

$$X_k^{-s} G_{r_h} X_k^s \qquad (s = 0, 1, \ldots, r_k - 1)$$

sono tutti diversi tra loro; infatti G_{r_h} è permutabile, oltre che colle proprie sostituzioni, soltanto con altre sostituzioni d'ordine pari, e tale non può essere X_k, che appartiene ad un gruppo G_{r_k} d'ordine dispari. Parimenti sono tutti diversi i sottogruppi:

$$X_h^{-s} G_{r_k} X_h^s \qquad (s = 0, 1, \ldots, r_h - 1);$$

ed è superfluo osservare anche che essi non posso-

no avere elementi comuni coi precedenti. Ora i primi sottogruppi contengono in tutto, oltre l'identità, $r_k(r_h - 1)$ sostituzioni, e i secondi ne contengono $r_h(r_k - 1)$; quindi si ha, *per ogni coppia di numeri* r_h, r_k *ambidue dispari:*

$$q \geqq 1 + r_k(r_h - 1) + r_h(r_k - 1),$$

ossia:

$$q \geqq 2 r_h r_k - r_h - r_k + 1. \tag{3}$$

119. Lo studio delle relazioni (1), (2), (3) dell'art. prec. ci condurrà al risultato voluto.

Anzitutto, siccome i coefficienti σ_i hanno il valore 1 o 2, si ha:

$$\frac{r_i - 1}{\sigma_i r_i} \geqq \frac{r_i - 1}{2 r_i} \geqq \frac{1}{4},$$

quindi, dovendo il denominatore del secondo membro della (1) essere positivo, si ha $\lambda \leqq 3$, ossia $\lambda = 1, 2, 3$. Distinguiamo i tre casi.

Sia dapprima $\lambda = 1$. Le (1), (2) divengono:

$$q = \frac{1}{1 - \frac{r_1 - 1}{\sigma_1 r_1}} = \frac{\sigma_1 r_1}{\sigma_1 r_1 - r_1 + 1}, \quad q \geqq \sigma_1 r_1,$$

donde segue:

$$\sigma_1 r_1 - r_1 + 1 \leqq 1,$$

ossia:

$$(\sigma_1 - 1) r_1 \leqq 0,$$

quindi $\sigma_1 - 1 \leqq 0$, e per conseguenza $\sigma_1 = 1$, $q = r_1$.

Sia ora $\lambda = 2$. La (1) diviene:

$$q = \frac{1}{1 - \frac{r_1 - 1}{\sigma_1 r_1} - \frac{r_2 - 1}{\sigma_2 r_2}}.$$

Per $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ si ha:

$$q = \frac{1}{1 - \frac{r_1 - 1}{2 r_1} - \frac{r_2 - 1}{2 r_2}} = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2} < 2 r_1 = \sigma_1 r_1,$$

che è in contraddizione colla (2).

Per $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$ si ha:

$$q = \frac{1}{1 - \frac{r_1 - 1}{2 r_1} - \frac{r_2 - 1}{r_2}} = \frac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} - 1},$$

donde segue che dev'essere:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} > 1.$$

Poichè $r_1 > 1$, dev'essere $r_2 < 4$, quindi $r_2 = 2$ o $r_2 = 3$. Se $r_2 = 2$, r_1 può essere qualunque, e risulta $q = 2 r_1$. Se $r_2 = 3$, risulta necessariamente $r_1 = 2$, indi $q = 12$.

In ambi i casi la (2) è soddisfatta. Quanto alla (3), non v'ha luogo di applicarla, essendo una delle r pari.

Infine per $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ si ha:

$$q = \frac{1}{1 - \frac{r_1 - 1}{r_1} - \frac{r_2 - 1}{r_2}} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - 1},$$

donde:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} > 1,$$

relazione che non può sussistere, essendo $r_1 \geq 2$, $r_2 \geq 2$.

Sia finalmente $\lambda = 3$, e quindi:

$$q = \frac{1}{1 - \frac{r_1 - 1}{\sigma_1 r_1} - \frac{r_2 - 1}{\sigma_2 r_2} - \frac{r_3 - 1}{\sigma_3 r_3}}.$$

Per $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2$ si ha:

$$q = \frac{1}{1 - \frac{r_1 - 1}{2 r_1} - \frac{r_2 - 1}{2 r_2} - \frac{r_3 - 1}{2 r_3}}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - 1},$$

ossia:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1 + \frac{2}{q},$$

che coincide colla (2) dell'art. 37. Le soluzioni di essa sono, come si è ivi trovato:

$r_1 = 2$, $r_2 = 2$, r_3 qualunque, $q = 2 r_3$;
$r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$, $q = 12$;
$r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 4$, $q = 24$;
$r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 5$, $q = 60$.

È facile verificare che la (2) è sempre soddisfatta. Invece la (3) non è soddisfatta per $h=2$,

$k = 3$ e per la 2ª soluzione; quindi questa è da escludersi.

Per $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 1$ si ha:

$$q = \frac{1}{1 - \frac{r_1 - 1}{2r_1} - \frac{r_2 - 1}{2r_2} - \frac{r_3 - 1}{r_3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2} + \frac{1}{r_3} - 1};$$

ma:

$$\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2} + \frac{1}{r_3} - 1 \leqq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0,$$

quindi q risulterebbe infinito o negativo.

Per $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$ si ha:

$$q = \frac{1}{1 - \frac{r_1 - 1}{2r_1} - \frac{r_2 - 1}{r_2} - \frac{r_3 - 1}{r_3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{3}{2}};$$

ma:

$$\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{3}{2} \leqq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{1}{4} < 0,$$

sicchè risulterebbe $q < 0$.

Infine per $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ si ha:

$$q = \frac{1}{1 - \frac{r_1 - 1}{r_1} - \frac{r_2 - 1}{r_2} - \frac{r_3 - 1}{r_3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - 2};$$

ma:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - 2 \leqq \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} < 0,$$

quindi q risulterebbe negativo.

Riassumendo, le soluzioni del sistema considerato sono le seguenti:

a) $\lambda = 1$; $\sigma_1 = 1$; r_1 qualunque; $q = r_1$.

b) $\lambda = 2$; $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$; r_1 qualunque, $r_2 = 2$; $q = 2r_1$.

c) $\lambda = 2$; $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$; $r_1 = 2$, $r_2 = 3$; $q = 12$.

d) $\lambda = 3$; $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2$; $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, r_3 qualunque; $q = 2r_3$.

e) $\lambda = 3$; $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2$; $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 4$; $q = 24$.

f) $\lambda = 3$; $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2$; $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 5$; $q = 60$.

120. Vediamo il significato di queste soluzioni.

La *a*) rappresenta evidentemente dei gruppi ciclici.

Le *b*), *d*) rappresentano dei gruppi diedrici, la prima per $\frac{q}{2}$ dispari, la seconda per $\frac{q}{2}$ pari.

Infatti nel primo caso i sottogruppi di 2^o ordine sono tutti equivalenti, e sono permutabili ciascuno soltanto colle proprie sostituzioni ($\sigma_2 = 1$); nel secondo si scindono in due sistemi di sottogruppi equivalenti, e ciascuno è permutabile, oltrechè colle proprie sostituzioni, con altre due ($\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 2$), cioè, passando alle rotazioni, con quella di ordine 2 intorno all'asse polare, e con quella di ordine 2 intorno all'asse equatoriale perpendicolare al proprio asse.

La c) rappresenta un gruppo tetraedrico. Infatti il gruppo definito dalla c) contiene un sottogruppo di ordine 3 permutabile solo colle proprie sostituzioni ($r_2 = 3$, $\sigma_2 = 1$), quindi facente parte d'un sistema di $\frac{12}{3} = 4$ sottogruppi equivalenti. Questi sottogruppi contengono in tutto 8 sostituzioni di ordine 3; le 3 che rimangono oltre l'identità sono d'ordine $2 (r_1 = 2)$ e permutabili tra loro ($\sigma_1 = 2$), e formano quindi coll'identità un gruppo trirettangolo, il quale, essendo unico, è necessariamente invariante. Ne segue (cfr. art. 115) che il gruppo considerato è tetraedrico.

La e) rappresenta un gruppo ottaedrico. Il gruppo da essa definito contiene anzitutto $\frac{q}{\sigma_3 r_3} = 3$ sottogruppi ciclici di ordine 4 equivalenti G_4, G'_4, G''_4. Se Y, Y', Y'' sono le loro sostituzioni generatrici, sarà:

$$Y^{-1} G'_4 Y = G'_4, \quad Y^{-1} G''_4 Y = G''_4,$$

oppure:

$$Y^{-1} G'_4 Y = G''_4, \quad Y^{-1} G''_4 Y = G'_4,$$

quindi in tutti i casi:

$$Y^{-2} G'_4 Y^2 = G'_4, \quad Y^{-2} G''_4 Y^2 = G''_4,$$

e perciò, tenuto conto che la trasformata d'una sostituzione è dello stesso ordine della sostituzione primitiva:

$$Y^{-2} Y'^2 Y^2 = Y'^2, \quad Y^{-2} Y''^2 Y^2 = Y''^2.$$

Analogamente sarà:

$$Y'^{-2} Y''^2 Y'^2 = Y''^2.$$

Il gruppo pertanto contiene 3 sostituzioni di ordine 2 permutabili fra loro, cioè Y^2, Y'^2, Y''^2; queste, insieme all'identità, formano un sottogruppo trirettangolo. Di più, siccome i sottogruppi G_4, G'_4, G''_4 formano un sistema completo di sottogruppi equivalenti, le Y^2, Y'^2, Y''^2 sono equivalenti soltanto fra loro, e però il sottogruppo trirettangolo a cui esse appartengono è invariante. Di qui si deduce (cfr. art. 116) che il gruppo considerato è ottaedrico.

Finalmente la f) rappresenta un gruppo icosaedrico.

Il gruppo G_{60} definito dalla f) contiene $\dfrac{q}{\sigma_1 r_1} = 15\ G_2$ equivalenti ($\sigma_1 = 2$, $r_1 = 2$), $\dfrac{q}{\sigma_2 r_2} = 10\ G_3$ equivalenti ($\sigma_2 = 2$, $r_2 = 3$), $\dfrac{q}{\sigma_3 r_3} = 6\ G_5$ equiva-

lenti ($\sigma_3 = 2$, $r_3 = 5$). Sieno $X_1, X_2, \ldots, X_{15}$ le 15 sostituzioni di ordine 2, e sia Y una sostituzione di ordine 3. Consideriamo uno dei prodotti $X_i Y$, e supponiamo dapprima che esso rappresenti una sostituzione d'ordine 2. Posto $X_i Y \equiv X_h$, da cui $Y \equiv X_i^{-1} X_h \equiv X_i X_h$, le tre relazioni:

$$X_h^2 \equiv 1, \quad X_i^2 \equiv 1, \quad (X_i X_h)^3 \equiv 1$$

mostrano che (art. 104) le X_i, X_h, o, ciò che è lo stesso, le X_i, Y, generano un gruppo diedrico G_6 d'ordine 6. Ora, essendo $\sigma_2 = 2$, ogni sottogruppo G_3 è contenuto come sottogruppo invariante in un sottogruppo diedrico G_6 di G_{60}, e però G_{60} contiene 10 sottogruppi diedrici d'ordine 6; questi sottogruppi contengono complessivamente 20 sostituzioni d'ordine 3, e poichè nel gruppo G_{60} vi sono appunto 20 sostituzioni d'ordine 3, può concludersi che ognuna di tali sostituzioni figura in un solo G_6. D'altra parte ogni G_6 contiene 3 sostituzioni d'ordine 2, quindi per ogni sostituzione Y d'ordine 3 vi sono 3 prodotti $X_i Y$ d'ordine 2.

Sia invece $X_i Y$ d'ordine 3; essendo allora:

$$Y^3 \equiv 1, \quad X_i^2 \equiv 1, \quad (X_i Y)^3 \equiv 1,$$

le Y, X_i generano (art. 104) un gruppo tetraedrico. Poichè ogni G_2 è permutabile con altre 2 sostituzioni di ordine 2 ($\sigma_1 = 2$), i 15 G_2 si divideranno in 5 terne le sostituzioni di ciascuna

delle quali saranno tra loro permutabili, sicchè si avranno 5 gruppi trirettangoli, e conseguentemente 5 gruppi tetraedrici. Questi contengono in tutto 40 sostituzioni d'ordine 3, e quindi, poichè le sostituzioni di questo ordine sono 20, ciascuna di esse figurerà in due gruppi tetraedrici. D'altra parte ogni gruppo tetraedrico contiene 3 operazioni d'ordine 2; quindi per ogni sostituzione Y d'ordine 3 vi sono 6 prodotti $X_i Y$ d'ordine 3.

Necessariamente i rimanenti 6 prodotti $X_i Y$ saranno d'ordine 5. Indicando con Z uno di tali prodotti, sicchè $Z \equiv X_i Y$, $Y = X_i^{-1} Z \equiv X_i Z$, segue dalle relazioni:

$$Z^5 \equiv 1, \quad X_i^2 \equiv 1, \quad (X_i Z)^3 \equiv 1,$$

che le Z, X_i, ossia le X_i, Y, generano un gruppo icosaedrico.

Dunque il nostro G_{60} contiene un sottogruppo icosaedrico. Ma poichè esso è d'ordine 60, deve essere esso stesso icosaedrico.

Si può concludere pertanto che, oltre i sottogruppi emimetaciclici, diedrici, tetraedrici, ottaedrici ed icosaedrici, non ne esistono altri.

E poichè nessuno dei sottogruppi trovati è invariante, si può anche concludere che, *nel caso in cui p è un numero primo,* $G_{\mu(p)}$ *è un gruppo semplice.*

PARTE SECONDA.

LE FUNZIONI E LE EQUAZIONI POLIEDRICHE E MODULARI.

Forme e funzioni poliedriche e modulari.

121. Una forma algebrica binaria si dice *invariante* rispetto ad una sostituzione lineare omogenea, se per effetto di quella sostituzione non varia o varia soltanto per un fattore costante; nel primo di questi due casi si dice anzi *assolutamente invariante*. Una forma dicesi invariante rispetto ad un gruppo di sostituzioni lineari omogenee, se lo è rispetto a tutte le sostituzioni del gruppo.

Evidentemente *una forma è invariante rispetto ad una sostituzione sempre e soltanto se le sue radici per effetto di questa restano immutate o si scambiano fra loro.* Ne segue che *una forma è invariante rispetto ad un gruppo finito di sostituzioni omogenee G'_{2n} sempre e soltanto se ha per radici uno o più sistemi di punti omologhi rispetto al corrispondente gruppo di sostituzioni non omogenee G_n.*

Diconsi *forme invarianti fondamentali* relative ad un gruppo omogeneo G'_{2n} o al corrispondente

gruppo non omogeneo G_n quelle le cui radici costituiscono un unico sistema di punti omologhi. Ogni forma invariante è un prodotto di forme fondamentali, e le forme fondamentali sono di grado n (art. 80). Tra esse ve ne sono due per i gruppi ciclici, tre per i gruppi poliedrici, che sono potenze ν_i-esime di forme di grado $\frac{n}{\nu_i}$; esse sono quelle le cui radici sono nodi della rete, e si distinguono col nome di *forme fondamentali semplici.*

Per costruire per ciascun gruppo finito il tipo più generale delle forme fondamentali, noi ci varremo dell'osservazione seguente. Una forma fondamentale è pienamente determinata quando è data una sua radice, quindi l'espressione più generale d'una forma fondamentale deve contenere un solo parametro indeterminato. Ciò premesso, noi costruiremo per ogni gruppo le forme fondamentali semplici, e col mezzo di queste cercheremo di ottenere una forma invariante di grado n in cui figuri un parametro arbitrario; questa sarà la più generale forma fondamentale relativa al gruppo considerato.

122. L'applicazione delle cose dette ai gruppi ciclici è semplicissima.

In questo caso abbiamo due sistemi di nodi costituiti ciascuno da un solo nodo n-plo; i due

nodi stanno, l'uno nell'origine, l'altro all'infinito, sicchè, designando con (z_1, z_2) il punto $\frac{z_1}{z_2}$, essi sono rappresentati da $(1, 0)$, $(0, 1)$. Quindi le due forme semplici sono:

$$\Phi_1 = F_1^n = z_1^n, \quad \Phi_2 = F_2^n = z_2^n.$$

Indichiamo con Φ'_i, F'_i le stesse forme Φ_i, F_i in cui in luogo di z_1, z_2 sia scritto z'_1, z'_2, sicchè:

$$\Phi'_1 = F_1'^n = z_1'^n, \quad \Phi'_2 = F_2'^n = z_2'^n.$$

Applicando le sostituzioni (art. 71):

$$z'_1 = e^{\frac{h\pi i}{n}} z_1, \quad z'_2 = e^{-\frac{h\pi i}{n}} z_2 \qquad (h = 0, 1, \ldots, 2n-1)$$

del gruppo ciclico omogeneo, troviamo:

$$\Phi'_1 = F_1'^n = (-1)^h z_1^n = (-1)^h \Phi_1 = (-1)^h F_1^n,$$
$$\Phi'_2 = F_2'^n = (-1)^h z_2^n = (-1)^h \Phi_2 = (-1)^h F_2^n.$$

Posto quindi:

$$F = \lambda_1 F_1^n + \lambda_2 F_2^n, \tag{1}$$

si avrà, qualunque sia $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$:

$$F' = (-1)^h F.$$

Dunque la (1), che è una forma invariante contenente un parametro, rappresenta la più generale forma fondamentale pel gruppo ciclico considerato.

123. Riguardo ai gruppi poliedrici devono farsi alcune considerazioni.

Dato un gruppo poliedrico, i nodi della rete relativa si scindono in 3 sistemi di punti omolo-

ghi, e corrispondentemente si possono costruire 3 forme semplici $F_1^{\nu_1}$, $F_2^{\nu_2}$, $F_3^{\nu_3}$, dove F_1, F_2, F_3 denotano forme dei gradi $\frac{n}{\nu_1}$, $\frac{n}{\nu_2}$, $\frac{n}{\nu_3}$. Se, come avviene effettivamente in tutti i casi che considereremo, il fattore di cui quelle 3 forme semplici variano per ogni singola sostituzione del gruppo è lo stesso per tutte le 3 forme, l'espressione:

$$F = \lambda_1 F_1^{\nu_1} + \lambda_2 F_2^{\nu_2} + \lambda_3 F_3^{\nu_3}$$

sarà una forma invariante fondamentale, qualunque sieno i valori di λ_1, λ_2, λ_3. D'altra parte noi sappiamo che la più generale forma fondamentale non contiene che un solo parametro; ne segue che le $F_1^{\nu_1}$, $F_2^{\nu_2}$, $F_3^{\nu_3}$ non possono essere linearmente indipendenti, ossia che tra esse deve aver luogo una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti:

$$(1) \qquad \mu_1 F_1^{\nu_1} + \mu_2 F_2^{\nu_2} + \mu_3 F_3^{\nu_3} = 0.$$

Supposta verificata questa relazione, la F si riduce a:

$$F = \frac{1}{\mu_3} [(\lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1) F_1 + (\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2) F_2]$$
$$= \lambda_1' F_1 + \lambda_2' F_2,$$

che dipende da un solo parametro.

Noi costruiremo per ciascun gruppo poliedrico le forme F_1, F_2, F_3 e la relazione (1). — Troveremo che in tutti i casi una delle tre forme è il determinante funzionale delle altre due.

124. I nodi della rete diedrica ($n = 2m$) sono: gli m vertici del poligono equatoriale, gli m punti di mezzo degli archi che uniscono i vertici successivi, e i due poli. Poichè uno dei vertici del poligono cade nel punto $z = 1$, e gli altri insieme ad esso dividono l'equatore in m parti eguali, i valori di z corrispondenti saranno le radici dell'equazione binomia:

$$z^m - 1 = 0.$$

Il secondo insieme di punti divide pure in m parti eguali l'equatore, ed uno dei punti è $z = e^{\frac{\pi i}{m}}$, quindi i valori di z corrispondenti sono le radici della equazione:

$$z^m - \left(e^{\frac{\pi i}{m}}\right)^m = z^m + 1 = 0.$$

In coordinate omogenee le due equazioni divengono:

$$z_1^m - z_2^m = 0, \quad z_1^m + z_2^m = 0;$$

inoltre quella le cui radici sono i due poli della sfera è:

$$z_1 z_2 = 0.$$

Quindi le 3 forme cercate sono:

$$F_1 = \tfrac{1}{2}(z_1^m - z_2^m), \quad F_2 = \tfrac{1}{2}(z_1^m + z_2^m), \quad F_3 = z_1 z_2.$$

Vediamo come variano queste forme per le sostituzioni del gruppo diedrico (art. 71):

$$\left.\begin{array}{ll} a) & z_1' = e^{\frac{h\pi i}{m}} z_1, \quad z_2' = e^{-\frac{h\pi i}{m}} z_2 \\ b) & z_1' = i\, e^{\frac{h\pi i}{m}} z_2, \quad z_2' = i\, e^{-\frac{h\pi i}{m}} z_1 \end{array}\right\} \quad (h = 0, 1, \ldots, 2m-1).$$

Per le *a*) si ha:

$$F_1' = \frac{1}{2}(z_1'^m - z_2'^m) = \frac{1}{2}(-1)^h(z_1^m - z_2^m) = (-1)^h F_1$$
$$F_2' = \frac{1}{2}(z_1'^m + z_2'^m) = \frac{1}{2}(-1)^h(z_1^m - z_2^m) = (-1)^h F_2$$
$$F_3' = z_1' z_2' = z_1 z_2 = F_3,$$

quindi:

$$F_1'^2 = F_1^2, \quad F_2'^2 = F_2^2, \quad F_3'^m = F_3^m;$$

per le *b*):

$$F_1' = \frac{1}{2}(z_1'^m - z_2'^m)$$
$$= \frac{1}{2} i^m (-1)^h (z_2^m - z_1^m) = - i^m (-1)^h F_1,$$
$$F_2' = \frac{1}{2}(z_1'^m + z_2'^m)$$
$$= \frac{1}{2} i^m (-1)^h (z_2^m + z_1^m) = i^m (-1)^h F_2,$$
$$F_3' = z_1' z_2' = - z_1 z_2 = - F_3,$$

quindi:

$$F_1'^2 = (-1)^m F_1^2, \quad F_2'^2 = (-1)^m F_2^2, \quad F_3'^m = (-1)^m F_3^m$$

Le forme Φ_1, Φ_2, Φ_3 variano dunque di uno stesso fattore per ogni singola sostituzione del gruppo, e il tipo generale delle forme fondamentali è:

$$F = \lambda_1 F_1^2 + \lambda_2 F_2^2 + \lambda_3 F_3^m$$
$$= \lambda_1 \left(\frac{z_1^m - z_2^m}{2}\right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{z_1^m + z_2^m}{2}\right)^2 + \lambda_3 (z_1 z_2)^m.$$

La relazione (1) dell'art. 123 diviene nel caso nostro:

$$\mu_1 \left(\frac{z_1^m - z_2^m}{2}\right)^2 + \mu_2 \left(\frac{z_1^m + z_2^m}{2}\right)^2 + \mu_3 (z_1 z_2)^m = 0.$$

Sviluppando si ha:

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{4} z_1^{2m} + \left(-\frac{\mu_1-\mu_2}{2}+\mu_3\right) z_1^m z_2^m + \frac{\mu_1+\mu_2}{4} z_2^{2m} = 0,$$

donde:

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{4} = 0, \quad -\frac{\mu_1-\mu_2}{2}+\mu_3 = 0,$$

e quindi:

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = 1 : -1 : 1,$$

sicchè la relazione cercata è:

$$F_1^2 - F_2^2 + F_3^m = 0.$$

Possiamo verificare che F_1 è, a meno d'un fattore costante, il determinante funzionale di F_2, F_3. Indicando infatti con $J(\varphi, \psi)$ il determinante funzionale o jacobiano delle due funzioni di due variabili φ, ψ, si ha:

$$J(F_2, F_3) = \begin{vmatrix} \frac{m}{2} z_1^{m-1} & \frac{m}{2} z_2^{m-1} \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m}{2}(z_1^m - z_2^m) = m F_1 .$$

125. I nodi della rete tetraedrica sono i 6 punti di mezzo degli spigoli, i 4 centri delle facce e i 4 vertici del tetraedro sferico. I primi sono i punti d'intersezione dei tre assi coordinati colla sfera di raggio 1, cioè i punti:

$$z = 1, \quad -1, \quad i, \quad -i, \quad 0, \quad \infty,$$

quindi la forma relativa è:

$$F_1 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)(z_1 - i z_2)(z_1 + i z_2) z_1 z_2$$
$$= z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4).$$

Noi la indicheremo con t.

I punti del secondo e del terzo insieme formano complessivamente i vertici del cubo già più volte considerato in relazione al tetraedro. Le coordinate di tali vertici hanno tutte (art. 63) il valore assoluto $\frac{1}{\sqrt{3}}$, e si ottengono prendendo tutte le possibili combinazioni di segni. È facile poi vedere che, secondo la disposizione da noi precedentemente adottata (v. fig. 5), i centri delle facce (ossia i vertici del tetraedro polare) sono:

$$A'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$B'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$C'\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$D'\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

i vertici:

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$B\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$C\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$D\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

I valori corrispondenti di z si trovano mediante le formole (2) dell'art. 60. Si ottiene così, δ, ε potendo prendere indipendentemente l'uno dall'altro i valori $+1$ e -1:

Per i centri delle facce:

$$z = \delta \frac{1 + \varepsilon i}{\sqrt{3} + \varepsilon};$$

Per i vertici:

$$z = \delta \frac{1 + \varepsilon i}{\sqrt{3} - \varepsilon}.$$

Le forme F_2, F_3 che si annullano in questi punti sono:

$$F_2 = z_1^4 + 2i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4,$$
$$F_3 = z_1^4 - 2i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4.$$

Noi le indicheremo rispettivamente con φ, ψ.

Riassumendo, dunque, le tre forme semplici sono:

$$F_1 = t = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4),$$
$$F_2 = \varphi = z_1^4 + 2i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4,$$
$$F_3 = \psi = z_1^4 - 2i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4.$$

Interessa avere anche le espressioni di queste forme per mezzo delle variabili $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ legate dalla relazione $\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} = \mathfrak{z}$ alla variabile $\mathfrak{z}$ usata alla fine dell'art. 63. Per la prima delle (5) di quell'articolo può porsi:

$$z_1 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \mathfrak{z}_1, \quad z_2 = \mathfrak{z}_2;$$

mediante queste formole si trova:

$$t = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} z_1 z_2 (z_1^4 + z_2^4),$$
$$\varphi = -\left[z_1^4 + 2\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 - z_2^4\right],$$
$$\psi = -\left[z_1^4 - 2\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 - z_2^4\right],$$

alle quali formole si possono sostituire le altre:

$$\mathbf{t} = z_1 z_2 (z_1^4 + z_2^4) = -\frac{1-i}{\sqrt{2}} t,$$
$$\Phi = z_1^4 + 2\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 - z_2^4 = -\varphi,$$
$$\Psi = z_1^4 - 2\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 - z_2^4 = -\psi.$$

Le sostituzioni del gruppo tetraedrico sono:

Le sostituzioni del sottogruppo trirettangolo, cioè:

$$\left.\begin{array}{lll} a) & z_1' = i^h z_1, & z_2' = i^{-h} z_2 \\ b) & z_1' = i^h z_2, & z_2' = -i^{-h} z_1 \end{array}\right\} (h = 0, 1, 2, 3).$$

Quelle che si ottengono da esse combinandole colla sostituzione:

$$c) \qquad z_1' = \alpha z_1 - \beta z_2, \quad z_2' = \alpha z_1 + \beta z_2$$

$\left(\text{dove } \alpha = \frac{1+i}{2},\ \beta = \frac{1-i}{2}\right)$, o col suo quadrato.

Per le sostituzioni $a)$ si ha:

$$z_1'^4 = z_1^4, \quad z_1' z_2' = z_1 z_2, \quad z_2'^4 = z^4,$$

quindi:

$$t' = z_1' z_2' (z_1'^4 - z_2'^4) = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4) = t,$$
$$\varphi' = z_1'^4 + 2i\sqrt{3}\, z_1'^2 z_2'^2 + z_2'^4 = z_1^4 + 2i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4 = \varphi,$$
$$\psi' = z_1'^4 - 2i\sqrt{3}\, z_1'^2 z_2'^2 + z_2'^4 = z_1^4 - 2i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4 = \psi.$$

Per le *b*) si ha:

$$z_1'^4 = z_2^4, \quad z_1' z_2' = - z_1 z_2, \quad z_2'^4 = z_1^4,$$

quindi:

$$t' = z_1' z_2' (z_1'^4 - z_2'^4) = - z_1 z_2 (z_2^4 - z_1^4) = t,$$

$$\varphi' = z_1'^4 + 2 i \sqrt{3}\, z_1'^2 z_2'^2 + z_2'^4 = z_2^4 + 2 i \sqrt{3}\, z_2^2 z_1^2 + z_1^4 = \varphi,$$

$$\psi' = z_1'^4 - 2 i \sqrt{3}\, z_1'^2 z_2'^2 + z_2'^4 = z_2^4 - 2 i \sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_1^4 = \psi.$$

Per la *c*) si ha:

$$z_1'^4 + z_2'^4 = - \frac{1}{2} z_1^4 + 3 z_1^2 z_2^2 - \frac{1}{2} z_2^4,$$

$$z_1'^4 - z_2'^4 = - 2 i z_1 z_2 (z_1^2 - z_2^2),$$

$$z_1' z_2' = \frac{i}{2} (z_1^2 + z_2^2),$$

quindi:

$$t' = z_1' z_2' (z_1'^4 - z_2'^4) = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4) = t,$$

$$\varphi' = z_1'^4 + 2 i \sqrt{3}\, z_1'^2 z_2'^2 + z_2'^4$$

$$= - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} (z_1^4 + 2 i \sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4) = - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \varphi,$$

$$\psi' = z_1'^4 - 2 i \sqrt{3}\, z_1'^2 z_2'^2 + z_2'^4$$

$$= - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} (z_1^4 - 2 i \sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^2) = - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \psi.$$

Pertanto si ha in tutti i casi:

$$t'^2 = t^2, \quad \varphi'^3 = \varphi^3, \quad \psi'^3 = \psi^3.$$

Dopo ciò il tipo generale delle forme fondamentali pel gruppo tetraedrico è:

$$F = \lambda_1 t^2 + \lambda_2 \varphi^3 + \lambda_3 \psi^3.$$

La solita relazione lineare diviene nel caso attuale:

$$\mu_1 t^2 + \mu_2 \varphi^3 + \mu_3 \psi^3 = 0.$$

Per determinarne i coefficienti, basta sviluppare i vari termini del primo membro ed eguagliare a zero i coefficienti di due termini dello sviluppo. Si ha:

$$\mu_1(z_1^{10} z_2^2 - \cdots) + \mu_2(z_1^{12} + 6i\sqrt{3}\, z_1^{10} z_2^2 + \cdots)$$
$$+ \mu_3(z_1^{12} - 6i\sqrt{3}\, z_1^{10} z_2^2 + \cdots) = 0,$$

quindi:

$$\mu_2 + \mu_3 = 0, \quad \mu_1 + 6i\sqrt{3}(\mu_2 - \mu_3) = 0,$$

da cui:

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = 12i\sqrt{3} : -1 : 1.$$

La relazione cercata è dunque:

$$12i\sqrt{3}\, t^2 - \varphi^3 + \psi^3 = 0;$$

essa diviene, nel secondo sistema di coordinate usato:

$$12\sqrt{3}\, \boldsymbol{t}^2 - \Phi^3 + \Psi^3 = 0.$$

Verifichiamo che t è il determinante funzionale di φ, ψ. Si ha infatti:

$$J(\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} 4z_1^3 + 4i\sqrt{3}\, z_1 z_2^2 & 4i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2 + 4z_2^3 \\ 4z_1^3 - 4i\sqrt{3}\, z_1 z_2^2 & -4i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2 + 4z_2^3 \end{vmatrix}$$
$$= -32i\sqrt{3}\, t.$$

Può anche osservarsi che la ψ è l'hessiano della φ. Infatti:

$$H(\varphi) = \begin{vmatrix} 12z_1^2 + 4i\sqrt{3}\, z_2^2 & 8i\sqrt{3}\, z_1 z_2 \\ 8i\sqrt{3}\, z_1 z_2 & 4i\sqrt{3}\, z_1^2 + 12z_2^2 \end{vmatrix}$$
$$= 48i\sqrt{3}\, \psi.$$

126. I nodi della rete ottaedrica sono i 12 punti di mezzo degli spigoli, gli 8 centri delle facce e i 6 vertici. Questi ultimi sono le radici di t, e gli 8 centri delle facce sono i vertici dei due tetraedri polari; quindi si ha:

$$F_3 = t, \quad F_2 = \varphi\psi = W,$$

W denotando il prodotto $\varphi\psi$. I punti di mezzo degli spigoli hanno una coordinata nulla e le altre due di valore $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, sicchè le loro coordinate sono le seguenti, dove si è posto $\frac{1}{\sqrt{2}} = \rho$:

$(0, \rho, \rho)$, $(0, \rho, -\rho)$, $(0, -\rho, -\rho)$, $(0, -\rho, \rho)$,
$(\rho, 0, \rho)$, $(\rho, 0, -\rho)$, $(-\rho, 0, -\rho)$, $(-\rho, 0, \rho)$,
$(\rho, \rho, 0)$, $(\rho, -\rho, 0)$, $(-\rho, -\rho, 0)$, $(-\rho, \rho, 0)$.

I valori corrispondenti di z sono, δ ed ε denotando due quantità che possono prendere, indipendentemente l'una dall'altra, i valori $+1$ e -1:

$$z = \frac{\delta i \rho}{1 + \varepsilon\rho}, \quad z = \frac{\delta\rho}{1 + \varepsilon\rho}, \quad z = \delta\rho(1 + \varepsilon i).$$

La forma di cui questi valori sono radici, e che indicheremo con χ, è:

$$F_1 = \left(z_1^4 - \frac{\rho^4}{(1+\rho)^4} z_2^4\right)\left(z_1^4 - \frac{\rho^4}{(1-\rho)^4} z_2^4\right)$$
$$[z_1^2 - \rho^2(1+i)^2 z_2^2][z_1^2 - \rho^2(1-i)^2 z_2^2]$$
$$= (z_1^8 - 34 z_1^4 z_2^4 + z_2^8)(z_1^4 + z_2^4)$$
$$= z_1^{12} - 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 + z_2^{12} = \chi,$$

sicchè si ha, riassumendo:

$$F_1 = \chi = z_1^{12} - 33\, z_1^8 z_2^4 - 33\, z_1^4 z_2^8 + z_2^{12},$$
$$F_2 = W = z_1^8 + 14\, z_1^4 z_2^4 + z_2^8,$$
$$F_3 = t = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4).$$

La W è l'hessiano della t, e la χ è il jacobiano di t, W. Infatti:

$$H(t) = \begin{vmatrix} 20\, z_1^3 z_2 & 5\,(z_1^4 - z_2^4) \\ 5\,(z_1^4 - z_2^4) & -20\, z_1 z_2^3 \end{vmatrix} = -25\, W,$$

$$J(t,\ W) = \begin{vmatrix} 5\, z_1^4 z_2 - z_2^5 & z_1^5 - 5\, z_1 z_2^4 \\ 8\, z_1^7 + 56\, z_1^3 z_2^4 & 56\, z_1^4 z_2^3 + 8\, z_2^7 \end{vmatrix}$$
$$= -8\,\chi.$$

Ora è noto (e d'altronde si dimostra molto facilmente) che, se una forma invariante rispetto ad una sostituzione si moltiplica per effetto di questa per λ, il suo hessiano è pure invariante e si moltiplica per λ^2; e che, se due forme invarianti si moltiplicano rispettivamente per λ, μ, il loro jacobiano si moltiplica per $\lambda\mu$. Basterà quindi esaminare come varia t per effetto delle sostituzioni del gruppo ottaedrico, per conoscere come variano W e χ.

Le sostituzioni del gruppo ottaedrico sono quelle del gruppo tetraedrico e i loro prodotti per la sostituzione:

$$(1) \qquad z_1' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, z_1, \quad z_2' = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\, z_2.$$

Si è veduto che le sostituzioni tetraedriche lasciano invariata t; quanto alla (1), essa ci dà:

$$z_1'^4 = -z_1^4, \quad z_2'^4 = -z_2^4, \quad z_1' z_2' = z_1 z_2,$$

quindi:

$$t' = -t.$$

Ne segue, per le sostituzioni tetraedriche:

$$W' = W, \quad \chi' = \chi,$$

per la sostituzione (1):

$$W' = W, \quad \chi' = -\chi;$$

si ha quindi in ogni caso:

$$t'^4 = t^4, \quad W'^3 = W^3, \quad \chi'^2 = \chi^2.$$

Dopo ciò il tipo generale delle forme fondamentali per il gruppo ottaedrico è:

$$F = \lambda_1 \chi^2 + \lambda_2 W^3 + \lambda_3 t^4.$$

Per determinare i coefficienti μ_i della relazione:

$$\mu_1 \chi^2 + \mu_2 W^3 + \mu_3 t^4 = 0,$$

basta fare prima $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, poi $z_1^4 = 1$, $z_2^4 = -1$; si ha nei due casi rispettivamente:

$$\chi^2 = 1, \quad W^3 = 1, \quad t^4 = 0;$$

$$\chi^2 = 0, \quad W^3 = (-12)^3, \quad t^4 = -2^4,$$

quindi:

$$\mu_1 + \mu_2 = 0, \quad (-12)^3 \mu_2 - 2^4 \mu_3 = 0,$$

da cui:

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = 1 : -1 : 108.$$

La relazione cercata è dunque:

$$\chi^2 - W^3 + 108\, t^4 = 0.$$

127. I nodi della rete icosaedrica sono i 30 punti di mezzo degli spigoli, i 20 centri delle facce e i 12 vertici. Noi calcoleremo direttamente la forma che ha per radici questi ultimi punti; per

ottenere le altre due, ricorreremo ad un ragionamento che vale anche per il tetraedro e per l'ottaedro, ma di cui non abbiamo voluto servirci prima d'ora per dare un esempio del calcolo diretto delle nostre forme.

Sia F_3 la forma le cui radici sono i vertici d'un poliedro regolare a facce triangolari (tetraedro, ottaedro od icosaedro). Il grado di questa forma è dato dal numero V dei vertici del poliedro. Il suo hessiano $H(F_3)$ sarà quindi di grado $2V-4$, e il jacobiano di F_3 e del suo hessiano, $J[F_3, H(F_3)]$, sarà di grado $V+(2V-4)-2$, ossia $3V-6$. Poichè queste forme sono covarianti, cioè non variano o variano d'un fattore per quelle sostituzioni lineari rispetto alle quali F_3 è invariante, esse devono avere per radici dei sistemi di punti omologhi. D'altra parte risulta dalle formole dell'art. 52:

$$V=\frac{n+12}{6},$$

$$F=2V-4=\frac{n}{3}<n,$$

$$S=3V-6=\frac{n}{2}<n,$$

sicchè le $H(F_3)$, $J[F_3, H(F_3)]$ devono essere forme semplici, e devono avere rispettivamente lo stesso grado delle forme cercate F_2, F_1. Deve essere quindi, a meno di fattori costanti:

$$H(F_3) = F_2, \quad J[F_3, H(F_3)] = F_1.$$

Ciò premesso, veniamo al calcolo di F_3.

I vertici 1, 12 hanno le coordinate $(0, 0, \pm 1)$; i valori corrispondenti di z sono $z = 0$, $z = \infty$.

Il vertice 2 ha le coordinate $(\text{sen}\, l, 0, \cos l)$, ossia (art. 65) $\left(\frac{2}{r}, 0, \frac{1}{r}\right)$, dove $r = \sqrt{5}$; il valore corrispondente di z [art. 60, (2)] è:

$$z = \frac{2}{r - 1} = \frac{r + 1}{2}.$$

Il vertice 7 ha le coordinate $(-\text{sen}\, l, 0, -\cos l)$, ossia $\left(-\frac{2}{r}, 0, -\frac{1}{r}\right)$; il valore corrispondente di z è:

$$z = -\frac{2}{r + 1} = -\frac{r - 1}{2}.$$

I punti del piano che rappresentano i vertici 3, 4, 5, 6 formano con quello che rappresenta il vertice 2 un pentagono regolare col centro nell'origine; e così i punti 8, 9, 10, 11 col punto 7.

Quindi la forma cercata è:

$$F_3 = z_1 z_2 \left[z_1^5 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^5 z_2^5\right]\left[z_1^5 + \left(\frac{r-1}{2}\right)^5 z_2^5\right]$$
$$= z_1 z_2 (z_1^{10} - 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}) \; *;$$

noi la indicheremo con f.

---

*) Si passa da questa forma a quella di Klein col cambiamento di variabili (cfr. nota a pag. 125):

$$z_1' = z_1, \quad z_2' = -z_2.$$

Si ha:

$$H(f)=\begin{vmatrix} 110z_1^9z_2-330z_1^4z_2^6, & 11z_1^{10}-396z_1^5z_2^5-11z_2^{10} \\ 11z_1^{10}-396z_1^5z_2^5-11z_2^{10}, & -330z_1^6z_2^4-110z_1z_2^9 \end{vmatrix}$$

$$=121[-z_1^{20}-228z_1^{15}z_2^5-494z_1^{10}z_2^{10}+228z_1^5z_2^{15}-z_2^{20}],$$

$$J[f,\ H(f)]$$

$$=121\begin{vmatrix} 11z_1^{10}z_2-66z_1^5z_2^6-z_2^{11}, & z_1^{11}-66z_1^6z_2^5-11z_1z_2^{10} \\ -20z_1^{19}-3420z_1^{14}z_2^5-4940z_1^9z_2^{10}+1140z_1^4z_2^{15}, & -1140z_1^{15}z_2^4-4940z_1^{10}z_2^9+3420z_1^5z_2^{14}-20z_2^{19} \end{vmatrix}$$

$$=2420[z_1^{30}-522z_1^{25}z_2^5-10005z_1^{20}z_2^{10}-10005z_1^{10}z_2^{20}+522z_1^5z_2^{25}+z_2^{30}].$$

Indicheremo le espressioni tra parentesi quadre rispettivamente con H, T. Abbiamo dunque:

$$f=z_1z_2(z_1^{10}-11z_1^5z_2^5-z_2^{10}),$$
$$H=-z_1^{20}-228z_1^{15}z_2^5-494z_1^{10}z_2^{10}+228z_1^5z_2^{15}-z_2^{20};$$
$$T=z_1^{30}-522z_1^{25}z_2^5-10005z_1^{20}z_2^{10}-10005z_1^{10}z_2^{20}+522z_1^5z_2^{25}+z_2^{30}.$$

Il gruppo icosaedrico è generato dalle sostituzioni S, T, U legate tra loro dalla relazione:

$$S^2TS^3TS^2T=U. \tag{1}$$

L'espressione delle S, U è:

$$z_1'=\varepsilon^3z_1,\quad z_2'=\varepsilon^2z_2,$$
$$z_1'=z_2,\quad z_2'=-z_1.$$

È facile verificare che per queste due sostituzioni la f resta invariata. La T, essendo di ordine 2, o lascia invariata la f o la moltiplica per -1. In questo secondo caso, in virtù della (1),

anche la U moltiplicherebbe f per -1, ciò che non è. Dunque anche T lascia invariata f. Di qui si conclude che tutte le sostituzioni del gruppo icosaedrico lasciano invariata f, e per conseguenza anche H e T.

Pertanto il tipo più generale delle forme fondamentali per il gruppo icosaedrico è:

$$F = \lambda_1 T^2 + \lambda_2 H^3 + \lambda_3 f^5.$$

Per determinare i coefficienti della relazione:

$$\mu_1 T^2 + \mu_2 H^3 + \mu_3 f^5 = 0$$

facciamo prima $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, poi $z_1 = z_2 = 1$; avremo nei due casi rispettivamente:

$$T = 1, \quad H = -1, \quad f = 0,$$

$$T = -20008, \quad H = -496, \quad f = -11,$$

e quindi:

$$\mu_1 - \mu_2 = 0,$$

$$(-20008)^2 \mu_1 + (-496)^3 \mu_2 + (-11)^5 \mu_3 = 0,$$

da cui:

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = 11^5 : 11^5 : 20008^2 - 496^3,$$

ossia:

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = 1 : 1 : 1728.$$

La relazione cercata è dunque:

$$T^2 + H^3 + 1728 f^5 = 0.$$

128. Mediante le forme sopra ottenute noi possiamo in ogni singolo caso costruire una funzione, che sia il rapporto di due forme invarianti dello stesso grado, e che resti invariata quando si applichino le sostituzioni del relativo gruppo omo-

geneo. Una tale funzione, essendo omogenea e di grado zero rispetto a z_1, z_2, è una funzione della z, che resta invariata per le sostituzioni del gruppo non omogeneo relativo al poliedro considerato. Alle funzioni razionali di z che restano invariate per tutte le sostituzioni di un gruppo poliedrico noi daremo il nome di *funzioni poliedriche*. Una funzione poliedrica prende uno stesso valore in uno o più sistemi di punti omologhi; se essa prende lo stesso valore in un solo sistema di punti omologhi, si dice *fondamentale*.

Evidentemente *il grado* * *di una funzione fondamentale è eguale all'ordine del gruppo relativo, e reciprocamente, se il grado di una funzione poliedrica è eguale all'ordine del gruppo, essa è fondamentale.*

Di qui segue che: *Se $V(z)$ è una funzione fondamentale, il tipo generale delle forme fondamentali relative al gruppo stesso è:*

$$\frac{a V(z) + b}{c V(z) + d},$$

dove a, b, c, d sono costanti. Ed anche che: *Una funzione fondamentale è pienamente determinata*

* Per *grado* d'una funzione razionale s'intende il maggiore dei gradi dei suoi due termini quando si imagini ridotta alla sua più semplice espressione.

quando si conoscono i valori che essa prende in tre punti del piano.

Noi indicheremo con $Z(z)$ quella funzione poliedrica la quale prende i valori 1, 0, ∞ rispettivamente nei punti di mezzo degli spigoli, nei centri delle facce e nei vertici del poligono sferico considerato. Naturalmente resta escluso da queste considerazioni il caso dei gruppi ciclici; per questi può prendersi:

$$Z = \frac{F_1^{\nu_1}}{F_2^{\nu_2}} = \frac{z_1^n}{z_2^n} = z^n.$$

Pei gruppi poliedrici, dalle condizioni a cui è sottoposta la Z, tenuto conto che una funzione razionale è determinata, a meno d'un fattore costante, quando se ne conoscano gli zeri e gli infiniti, si ha:

$$Z = h\frac{F_2^{\nu_2}}{F_3^{\nu_3}}, \quad Z - 1 = k\frac{F_1^{\nu_1}}{F_3^{\nu_3}},$$

h, k essendo due costanti. Mediante queste relazioni la (1) dell'art. 123 diviene:

$$\frac{\mu_1}{k}(Z-1) + \frac{\mu_2}{h}Z + \mu_3 = 0;$$

poichè questa relazione deve sussistere identicamente, si ha:

$$\frac{\mu_1}{k} + \frac{\mu_2}{h} = 0, \quad -\frac{\mu_1}{k} + \mu_3 = 0,$$

da cui:

$$h = -\frac{\mu_2}{\mu_3}, \quad k = \frac{\mu_1}{\mu_3},$$

e quindi:

$$Z = -\frac{\mu_2}{\mu_3}\frac{F_2^{\nu_2}}{F_3^{\nu_3}}, \qquad Z - 1 = \frac{\mu_1}{\mu_3}\frac{F_1^{\nu_1}}{F_3^{\nu_3}},$$

ossia:

$$Z - 1 : Z : 1 = \mu_1 F_1^{\nu_1} : -\mu_2 F_2^{\nu_2} : \mu_3 F_3^{\nu_3}.$$

Si ha dunque per i gruppi ciclico, diedrico, tetraedrico, ottaedrico e icosaedrico rispettivamente:

$$Z = z^n,$$

$$Z = \frac{(z^m + 1)^2}{4z^m},$$

$$Z = \frac{\varphi^3}{\psi^3} = \left(\frac{z^4 + 2i\sqrt{3}z^2 + 1}{z^4 - 2i\sqrt{3}z^2 + 1}\right)^3,$$

$$Z = \frac{W^3}{108\,t^4} = \frac{(z^8 + 14z^4 + 1)^3}{108\,z^4(z^4 - 1)^4},$$

$$Z = -\frac{H^3}{1728 f^5} \cdot$$

$$= -\frac{(-z^{20} - 228z^{15} - 494z^{10} + 228z^5 - 1)^3}{1728z^5(z^{10} - 11z^5 - 1)^5}.$$

Siccome, pel teorema d'Eulero, il numero degli spigoli aumentato di 2 è eguale alla somma del numero delle facce e di quello dei vertici, e siccome questi numeri sono rispettivamente i gradi di F_1, F_2, F_3, così la forma:

$$X(z_1, z_2) = \frac{F_2 F_3}{F_1}$$

è di grado 2, sicchè si ha, per un noto teorema sulle funzioni omogenee:

$$X(z_1, z_2) = z_2^2 X(z, 1),$$

dove:

$$X(z, 1) = \frac{F_2(z, 1) F_3(z, 1)}{F_1(z, 1)}$$

è una determinata funzione razionale di z. Scrivendo semplicemente X in luogo di $X(z_1, z_2)$, si ha di qui:

$$(1) \qquad z_2 = \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{X(z, 1)}}, \quad z_1 = \frac{z\sqrt{X}}{\sqrt{X(z, 1)}}.$$

D'altra parte, indicando con c la costante $-\frac{\mu_2}{\mu_3}$, si ha:

$$Z = c\frac{F_2^{\nu_2}}{F_3^{\nu_3}},$$

e anche, tenuto conto che il 2° membro è una funzione omogenea di grado zero delle z_1, z_2:

$$Z = c\frac{[F_2(z, 1)]^{\nu_2}}{[F_3(z, 1)]^{\nu_3}}.$$

Più brevemente indichiamo con $F(z)$ il secondo membro di questa equazione, che è una funzione razionale di z; potremo scrivere:

$$Z = F(z).$$

Questa equazione può definire z come funzione algebrica di Z, dopo di che le (1) definiscono z_1, z_2 come funzioni algebriche di Z, X.

129. Un problema analogo a quello testè risolto pei gruppi poliedrici si presenta per il gruppo modulare. Si tratta cioè di costruire una funzione trascendente uniforme di z la quale abbia la pro-

prietà di riprendere uno stesso valore in punti omologhi della rete modulare e soltanto in questi, ed abbia i valori 1, 0, ∞ nei nodi di 1ª, 2ª e 3ª specie della detta rete. Una tale funzione si dirà *funzione modulare principale,* mentre chiameremo in generale *funzione modulare* ogni funzione che riprende lo stesso valore sempre e soltanto nei punti tra loro omologhi rispetto ad un sottogruppo di Γ *.

La risoluzione del problema ci è fornita dalla teoria delle funzioni ellittiche.

È noto ** che, data una coppia di periodi primitivi $2\zeta_1$, $2\zeta_2$ della funzione ellittica, questa è completamente determinata; si ha infatti:

$$p\,u = \frac{1}{u^2} + \sum_s \left[\frac{1}{(u-s)^2} - \frac{1}{s^2}\right],$$

dove s prende tutti i valori $2m\zeta_1 + 2n\zeta_2$ in cui m ed n sono numeri interi non ambidue nulli e di segno qualunque. Sono parimenti determinati gli *invarianti* g_2, g_3 della funzione ellittica; si ha

* Le funzioni analoghe pei gruppi poliedrici non hanno alcuno speciale interesse, giacchè i sottogruppi dei gruppi poliedrici sono a loro volta gruppi ciclici o poliedrici.

**) Per questa ed altre formole relative alla teoria delle funzioni ellittiche vedasi p. es.: WEIERSTRASS-SCHWARZ, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen,* Göttingen 1883.

cioè:

$$(1) \qquad g_2 = 60 \sum_s \frac{1}{s^4}, \quad g_3 = 140 \sum_s \frac{1}{s^6}.$$

Mediante gli invarianti si formano il *discriminante* Δ e l'*invariante assoluto* J, dati dalle formole:

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2, \quad J = \frac{g_2^3}{\Delta};$$

J, essendo una funzione omogenea di grado zero di z_1, z_2, è funzione del solo rapporto $\frac{z_1}{z_2} = z$.

Altre espressioni di g_2, g_3, Δ sono:

$$g_2 = \left(\frac{\pi}{z_2}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{h^3 \tau^h}{1 - \tau^h}\right],$$

$$g_3 = \left(\frac{\pi}{z_2}\right)^6 \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{h^5 \tau^h}{1 - \tau^h}\right],$$

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{z_2}\right)^{12} \tau \prod_{h=1}^{\infty} (1 - \tau^h)^{24},$$

dove:

$$\tau = e^{2\pi i \frac{z_1}{z_2}}.$$

Notiamo ancora che, a meno d'un fattore costante, Δ è il determinante funzionale di g_2, g_3.

Dalle relazioni scritte risulta:

$$J - 1 : J : 1 = 27 g_3^2 : g_2^3 : \Delta.$$

Ricordiamo che, per un celebre teorema di Jacobi, il rapporto $\frac{z_1}{z_2}$ non può essere reale. E

poichè la parte imaginaria di $\frac{z_1}{z_2}$ e quella di $\frac{z_2}{z_1}$ hanno segno opposto, noi possiamo ammettere, senza danno della generalità, che la parte imaginaria di $\frac{z_1}{z_2}$ sia positiva.

Ora è noto che una funzione ellittica ammette infinite coppie di periodi primitivi, e che, se $2z_1$, $2z_2$ è una tale coppia, qualunque altra $2z'_1$, $2z'_2$ è data dalle espressioni:

$$2z'_1 = \alpha . 2z_1 + \beta . 2z_2 ,$$
$$2z'_2 = \gamma . 2z_1 + \delta . 2z_2 ,$$

dove:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 ;$$

se inoltre si sottopone anche la nuova coppia alla condizione che la parte imaginaria di $\frac{z'_1}{z'_2}$ sia positiva, dev'essere:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = + 1 .$$

Pertanto può dirsi che, se z_1, z_2 è una coppia di semiperiodi primitivi d'una funzione ellittica, tutte le altre coppie di semiperiodi primitivi della funzione stessa si ottengono applicando alla coppia di valori z_1, z_2 le sostituzioni del gruppo modulare omogeneo. Ne segue che le funzioni g_2, g_3, e conseguentemente le Δ, J, non variano se alle z_1, z_2 si applicano le sostituzioni di quel gruppo. E poichè esse sono funzioni omogenee (dei gradi

$-4, -6, -12, 0)$ di z_1, z_2, noi le diremo *forme modulari assolutamente invarianti;* o più semplicemente *forme modulari.* In particolare J è una funzione di z la quale non muta quando la z si assoggetta alle sostituzioni del gruppo modulare non omogeneo; essa è dunque una *funzione modulare principale.*

Si sa che g_2, g_3, Δ si annullano rispettivamente per $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, i, ∞. Ne segue che *nei nodi di* 1^a, 2^a, 3^a *specie della rete modulare la funzione* J *prende rispettivamente i valori* 1, 0, ∞.

Inoltre, poichè le (1) possono scriversi:

$$z_2^4 g_2 = 60 \sum_{m,n} \frac{1}{(2mz+2n)^4},$$

$$z_2^6 g_3 = 140 \sum_{m,n} \frac{1}{(2mz+2n)^6},$$

si vede che per valori di z rappresentati da punti simmetrici rispetto all'asse imaginario tanto $z_2^4 g_2$ che $z_2^6 g_3$ prendono valori coniugati *.

---

* Consideriamo infatti la somma $\sum_{m,n} \frac{1}{(mz+n)^4}$, e poniamo in essa prima $z = x + iy$, poi $z = -x + iy$; avremo rispettivamente:

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(mx+n+miy)^4}, \quad \sum_{m,n} \frac{1}{(-mx+n+miy)^4},$$

od anche:

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(mx+n+miy)^4}, \quad \sum_{m,n} \frac{1}{(mx-n-miy)^4}.$$

Ne segue che J è una funzione modulare, il cui valore si trasforma nel coniugato per la pseudo-sostituzione $\overline{z'} = -z$. Di qui si deduce che: *J è reale su tutti i lati della rete modulare.*

130. Consideriamo più generalmente una funzione $Z(z)$ che riprenda il proprio valore nei punti omologhi d'una rete regolare rappresentante un gruppo di sostituzioni lineari, che abbia valori coniugati nei punti simmetrici rispetto ad uno qualunque dei circoli della rete, e che prenda i valori 1, 0, ∞ nei nodi di 1ª, 2ª, 3ª specie. Essa sarà reale sui lati di tutti i triangoli, e, indicando per un istante con a, b, c i vertici di 1ª, 2ª, 3ª specie di un triangolo qualunque, sul lato ab andrà da 1 a 0, sul lato bc da 0 a $-\infty$, e sul lato ac da 1 a ∞; inoltre entro uno stesso triangolo la parte imaginaria di $Z(z)$ avrà uno stesso segno, ed entro due triangoli contigui segno opposto, sicchè, per es., il segno sarà positivo in tutti i triangoli bianchi, negativo in tutti quelli tratteggiati. Se rappresentiamo i valori della funzione Z sopra un piano,

---

Ma poichè n prende tutti i valori positivi e negativi, noi potremo nella seconda somma scrivere $-n$ invece di n; essa diviene allora $\sum_{m,n} \frac{1}{(mx+n-miy)^4}$, e si vede che è coniugata alla prima. Nello stesso modo si farebbe la dimostrazione per g_3.

ai punti a, b, c del piano z corrisponderanno nel piano Z i punti 1, 0, ∞, ai lati ab, bc, ac i segmenti $1 \ldots 0$, $0 \ldots -\infty$, $1 \ldots \infty$ dell'asse reale, di più ad un triangolo bianco corrisponderà l'intero semipiano superiore, ad un triangolo tratteggiato l'intero semipiano inferiore. Ciò mostra che in ogni bitriangolo la funzione prende tutti i valori possibili. All'intera rete corrisponde sul piano Z una *superficie di* RIEMANN ad n o ad ∞ fogli, secondochè il gruppo è d'ordine n o d'ordine infinito. La corrispondenza tra i due piani è, come risulta dai principii generali della teoria delle funzioni, conforme, fatta eccezione pei punti di diramazione 1, 0, ∞ della superficie di RIEMANN, nei quali troviamo angoli π come corrispondenti agli angoli $\frac{\pi}{\nu_1}$, $\frac{\pi}{\nu_2}$, $\frac{\pi}{\nu_3}$ del piano z. Di qui segue che, se z_0 è un punto diverso dai nodi della rete, e se Z_0 è il valore di Z corrispondente al valore z_0 di z, si ha, k essendo una costante:

$$(1) \qquad z - z_0 \equiv k(Z - Z_0),$$

colla quale notazione vogliamo intendere che $z - z_0$ è eguale a $k(Z - Z_0)$ a meno di infinitesimi d'ordine superiore.

Invece per i punti a, b, c si avrà:

$$(2) \qquad z - a \equiv k(Z - 1)^{\frac{1}{\nu_1}},$$

$$(3) \qquad z - b \equiv k Z^{\frac{1}{\nu_2}},$$

(4) $$z - c = kZ^{-\frac{1}{\nu_3}}.$$

Queste formole però non valgono se $\nu_i = \infty$, se cioè qualcuno degli angoli della rete è nullo. Supposto, per es., $\nu_2 = \infty$, invece della seconda formola si ha la seguente:

(5) $$z - b = \frac{k}{\log Z + l} \ *.$$

Noi indicheremo con $z(\nu_1, \nu_2, \nu_3; Z)$ la z considerata come funzione di Z.

---

* A questa formola si può giungere come segue.

Se $\nu_2 = \infty$, il punto b sta sull'asse reale, e i due lati del triangolo in esso concorrenti hanno la tangente comune parallela all'asse imaginario. Sieno α, β i raggi, in grandezza e segno, dei cerchi di cui fanno parte quei lati; le equazioni dei cerchi stessi saranno:

$$(x-b)^2 + y^2 - 2\alpha(x-b) = 0, \quad (x-b)^2 + y^2 - 2\beta(x-b) = 0$$

Mediante la sostituzione $z' = -\frac{1}{z-b}$, i cerchi si mutano in due rette parallele all'asse y', le cui equazioni sono:

$$x' = -\frac{1}{2\alpha}, \quad x' = -\frac{1}{2\beta}.$$

È noto poi che un fascio di rette parallele si muta in un fascio di rette concorrenti mediante una trasformazione del tipo:

$$z' = e^{\mu z + \nu}.$$

Nel caso nostro porremo:

$$Z = e^{i(pz' + q)},$$

p e q essendo costanti reali; infatti, se $Z = Re^{i\Theta}$, avremo:

$$R = e^{-py'}, \quad \Theta = px' + q,$$

sicchè alle rette x'=cost. corrisponderanno le rette Θ=cost., ed in particolare alle due rette considerate le rette:

$$\Theta = -\frac{p}{2\alpha} + q, \quad \Theta = -\frac{p}{2\beta} + q.$$

131. Di qui risulta un teorema importante.

Abbiansi le due funzioni $z(\nu_1, \nu_2, \nu_3; Z)$, $z'(\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3; Z)$, e sieno ν_1, ν_2, ν_3 rispettivamente multipli di ν'_1, ν'_2, ν'_3. Se $\nu_i = \infty$, lo considereremo come multiplo di ν'_i, tanto se ν'_i è finito, come se è infinito. Per la z' esisteranno relazioni analoghe alle (1)-(5) dell'art. prec. Ne segue:

$$z' - z'_0 \equiv \frac{k'}{k}(z - z_0),$$

$$z' - a' \equiv \frac{k'}{k^{\frac{\nu_1}{\nu'_1}}}(z - a)^{\frac{\nu_1}{\nu'_1}},$$

$$z' - b' \equiv \frac{k'}{k^{\frac{\nu_2}{\nu'_2}}}(z - b)^{\frac{\nu_2}{\nu'_2}},$$

$$z' - c' \equiv \frac{k'}{k^{\frac{\nu_3}{\nu'_3}}}(z - c)^{\frac{\nu_3}{\nu'_3}}.$$

Se infine vogliamo che questi due raggi sieno le due metà dell'asse x, dovrà essere:

$$0 = -\frac{p}{2\alpha} + q, \quad \pi = -\frac{p}{2\beta} + q,$$

donde:

$$p = \frac{2\pi\alpha\beta}{\beta - \alpha}, \quad q = \frac{\pi\beta}{\beta - \alpha}.$$

Si ha dunque:

$$Z = e^{i\left(-\frac{p}{z-b} + q\right)},$$

da cui:

$$z - b = \frac{-ip}{\log Z - iq}.$$

Se $\nu_2 = \infty$ mentre ν'_2 è finito, si ottiene:

$$z' - b' \equiv k' e^{-\frac{l}{\nu'_2}} e^{\frac{k}{\nu'_2(z-b)}};$$

se $\nu_2 = \infty$, $\nu'_2 = \infty$, si ottiene invece:

$$z' - b' \equiv \frac{k'(z-b)}{(l'-l)(z-b)+k}.$$

Da queste formole risulta che: *Se le* ν_i *sono rispettivamente multiple delle* ν'_i, *la* z' *è funzione uniforme della* z.

Di questo teorema possiamo fare subito due applicazioni.

a) Le reti corrispondenti al gruppo diedrico per $m = 3$ ed ai gruppi tetraedrico, ottaedrico ed icosaedrico hanno rispettivamente i simboli:

$$(2, 3, 2), \quad (2, 3, 3), \quad (2, 3, 4), \quad (2, 3, 5),$$

mentre la rete modulare ha il simbolo $(2, 3, \infty)$. Quindi:

Se le variabili Z, z, z' *sono legate dalle due relazioni:*

$$Z = F(z'), \quad Z = J(z),$$

dove F *è una delle quattro funzioni:*

$$\frac{(z^3+1)^2}{4z^3}, \quad \frac{\varphi^3}{\psi^3}, \quad \frac{W^3}{108\,t^4}, \quad -\frac{H^3}{1728 f^5},$$

e J *è la funzione così denotata nell'art.* 129, z' *è funzione uniforme di* z.

b) Il triangolo fondamentale del sottogruppo Γ_6 di Γ ha i suoi tre angoli nulli; quindi, se si indica con $\lambda(z)$ una funzione avente per campo

fondamentale una coppia di triangoli della rete Γ_6, la z, considerata come funzione di λ, potrà scriversi $z(\infty, \infty, \infty; \lambda)$. Ne segue che, qualunque sia la funzione $z'(\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3; \lambda)$, z' sarà funzione uniforme di z.

Esistenza delle funzioni modulari.

132. Abbiamo convenuto di chiamare *funzione modulare* ogni funzione invariante per un sottogruppo del gruppo modulare. Possiamo ora chiederci se per qualunque sottogruppo di Γ esistano funzioni modulari corrispondenti.

Scopo delle considerazioni che seguono è appunto di dimostrare l'esistenza di funzioni modulari relative a qualunque sottogruppo Γ_s d'indice finito s di Γ.

La relazione:

$$J = J(z)$$

stabilisce una rappresentazione conforme del piano della variabile J sopra un bitriangolo della rete modulare. Poichè J è reale sui lati della rete, alle due metà del bitriangolo corrisponderanno rispettivamente le due metà in cui il piano J è diviso dall'asse reale. Noi stabiliremo che al triangolo bianco corrisponda il semipiano superiore, al triangolo tratteggiato il semipiano inferiore. La rappresentazione cessa di essere conforme nei punti 1,

0, ∞ del piano J, giacchè, mentre, per es., nel punto 1 del piano J i due tratti dell'asse x fanno un angolo piatto, le linee corrispondenti nel piano z fanno un angolo di 90°.

Agli infiniti bitriangoli della rete modulare corrispondono infiniti fogli coincidenti col piano J; e, se nel piano z si passa da uno ad un altro bitriangolo girando intorno ad un nodo della rete, corrispondentemente nel piano J si andrà da uno ad un altro dei fogli costruiti girando attorno ad uno dei punti 1, 0, ∞. L'insieme dei fogli coincidenti col piano J costituisce una *superficie di* RIEMANN ad infiniti fogli, e 1, 0, ∞ sono i suoi punti di diramazione.

Abbiasi ora un sottogruppo Γ_s d'indice finito s, e sia C_s il suo campo fondamentale. A C_s corrisponderà un insieme R_s di s fogli della superficie di RIEMANN giacente sul piano J. Possiamo effettuare questa corrispondenza deformando un bitriangolo in modo da farlo coincidere coll'intero piano J; i nodi dovranno cadere nei punti 1, 0, ∞.

Siccome fra la superficie R_s e la superficie chiusa a cui si può ridurre il campo C_s (cfr. art. 83) esiste una corrispondenza biunivoca, così, per un noto teorema, il genere delle due superficie è lo stesso.

Ciò si può anche verificare direttamente.

Per il genere della superficie chiusa C_s si è

trovato (art. 86):

$$p = 1 - s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{V} (m_i - 1),$$

dove $2m_i$ è il numero degli spigoli concorrenti nell'i-esimo nodo, e V è il numero dei nodi. D'altra parte la teoria delle funzioni algebriche ci dà per il genere d'una superficie di RIEMANN:

$$p = 1 - s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{V} (m_i - 1),$$

dove s è il numero dei fogli della superficie, m_i il numero dei fogli che si attaccano nell'i-esimo punto di diramazione, e V il numero dei punti di diramazione. Ora il numero dei bitriangoli di C_s è eguale al numero dei fogli di R_s, ad ogni nodo di C_s corrisponde un punto di diramazione di R_s *, e ad ogni bitriangolo concorrente in un nodo di C_s corrisponde in R_s un foglio che si attacca ad altri fogli nel punto di diramazione corrispondente; quindi i due valori di p sono eguali.

In virtù dei teoremi d'esistenza di RIEMANN, esistono funzioni di J uniformi sopra la R_s. Sia y una di queste, e sia:

(1) $$f(y, J) = 0$$

* I soli punti di diramazione della R_s sono i punti 1, 0, ∞; però, se dei fogli che si uniscono in uno di questi punti h_1 formano un ciclo, h_2 un secondo, ..., h_r un r-esimo, il punto si considera come un insieme di r punti di diramazione diversi degli ordini rispettivi $h_1 - 1, h_2 - 1, \ldots, h_r - 1$.

la relazione algebrica che lega y a J. Poichè la y prende un unico valore in ciascun punto della R_s, e poichè R_s e C_s si corrispondono punto a punto, si può dire che y prende un unico valore in ciascun punto di C_s. Di più, siccome ogni punto di R_s corrisponde ad infiniti punti del piano z, e cioè a tutti i punti omologhi ad un stesso punto di C_s rispetto a Γ_s, può dirsi che y, come funzione di z, riprende lo stesso valore nei punti omologhi rispetto a C_s. In altre parole la y è una funzione modulare relativa al sottogruppo Γ_s. Dunque: *Dato un sottogruppo* Γ_s *d'indice finito* s *di* Γ, *esistono funzioni modulari relative al sottogruppo; esse sono legate a* J *da relazioni algebriche.*

Ogni altra funzione modulare relativa a Γ_s è una funzione uniforme sulla R_s, e quindi è una funzione razionale di y, J.

È facile vedere che le varie radici della (1) sono funzioni modulari relative ed altrettanti sottogruppi equivalenti a Γ_s e quindi rappresentati dalla rete C_s. Sieno $1, S_1, S_2, \ldots, S_{s-1}$ i simboli degli s bitriangoli della rete modulare che compongono il campo C_s; i valori della y in s punti omologhi rispetto a Γ del campo C_s, ossia in s punti sovrapposti della R_s, saranno:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} y(z) = y(z), \quad y_1(z) = y[S_1(z)], \ldots, \\ \qquad\qquad y_{s-1}(z) = y[S_{s-1}(z)]. \end{array} \right.$$

Ora, se P è una sostituzione qualunque di

Γ_s, si ha:

$$y[P(z)] = y(z).$$

Se in questa relazione invece di z si pone $S_i(z)$, si ha:

$$y[S_i P(z)] = y[S_i(z)] = y_i(z). \tag{3}$$

D'altra parte le (2) possono scriversi:

$$y_i[S_i^{-1}(z)] = y(z);$$

ponendo $S_i P(z)$ invece di z, si ha:

$$y_i[S_i P S_i^{-1}(z)] = y[S_i P(z)],$$

e quindi, per la (3):

$$y_i[S_i P S_i^{-1}(z)] = y_i(z).$$

Cioè *la $y_i(z)$ è una funzione modulare relativa al sottogruppo $S_i \Gamma_s S_i^{-1}$ equivalente a Γ_s.*

133. Tratteniamoci particolarmente sul caso in cui Γ_s è un sottogruppo invariante. Allora tutte le radici della (1) sono funzioni modulari appartenenti al sottogruppo Γ_s, e quindi sono funzioni razionali di una di esse e di J:

$$y_i = \rho_i(y, J) \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1). \tag{1}$$

La (1) può considerarsi come una trasformazione della R_s in sè stessa, per la quale il punto (y, J) si muta nel punto (y_i, J). È chiaro che le trasformazioni (1), insieme all'identità, formano un gruppo, il quale, in sostanza, coincide col gruppo G_s delle trasformazioni della superficie chiusa C_s in sè stessa (v. art. 83).

Esaminiamo ora i varî casi possibili.

a) Se $p = 0$, la R_s può farsi corrispondere

punto a punto ad un piano u, e le y, J possono esprimersi razionalmente per u:

$$y = E(u), \quad J = F(u).$$

La u è essa stessa una funzione modulare del sottogruppo considerato, e l'equazione:

$$J = F(u) \tag{2}$$

non è altro che la (1) dell'art. prec. nella forma speciale che prende nel caso considerato; essa può anche porsi sotto la forma:

$$J - 1 : J : 1 = \varphi(u) : \psi(u) : \chi(u),$$

dove $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ sono tre funzioni razionali legate dalla relazione:

$$\varphi(u) = \psi(u) - \chi(u).$$

Le radici della (2) possono tutte esprimersi razionalmente mediante una qualunque di esse e mediante J; ma J è funzione razionale di u, quindi può dirsi che tutte le radici possono esprimersi razionalmente mediante una qualunque di esse. Ne segue che qualunque radice dev'essere funzione lineare di qualunque altra; per es.:

$$u_i = \frac{\alpha_i u + \beta_i}{\gamma_i u + \delta_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s - 1).$$

b) Sia in secondo luogo $p = 1$, cioè la R_s sia ellittica. Allora possiamo prendere due funzioni u, v regolari sulla R_s legate dalla relazione:

$$v^2 = \rho(u),$$

dove $\rho(u)$ è un polinomio di 3° grado; mediante queste si esprimeranno razionalmente tutte le fun-

zioni regolari sulla R_s, sicchè, posto:

$$u[S_i(z)] = u_i(z), \quad v[S_i(z)] = v_i(z),$$

si avrà:

$$(3) \qquad u_i = H_i(u, v), \quad v_i = K_i(u, v),$$

H_i, K_i essendo simboli di funzioni razionali. Se le u, v si considerano come le coordinate dei punti d'una cubica, le (3) rappresentano un gruppo di trasformazioni razionali di questa curva in sè stessa.

c) Sia ora $p > 2$, e la R_s non sia iperellittica. Designiamo con $Q_h(y, J)(h = 1, 2, \ldots, p)$ un sistema di funzioni aggiunte d'ordine $n - 3$ linearmente indipendenti; esse daranno origine ad un sistema di integrali abeliani di 1ª specie linearmente indipendenti:

$$I_h = \int \frac{Q_h(y, J)}{\frac{\partial f(y, J)}{\partial y}} dJ \qquad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Se in I_h invece di y poniamo y_i, I_h si muta in un altro integrale:

$$I_h^{(i)} = \int \frac{Q_h(y_i, J)}{\frac{\partial f(y_i, J)}{\partial y_i}} dJ.$$

L'insieme dei valori che prende I_h negli s punti della R_s in cui J ha uno stesso valore, coincide coll'insieme di quelli che prende $I_h^{(i)}$ nei punti medesimi; quindi, poichè I_h è sempre finito, lo è anche $I_h^{(i)}$. In altre parole, $I_h^{(i)}$ è un integrale di

1ª specie, e quindi $Q_h(y_i, J)$ è una funzione aggiunta di ordine $n-3$. Ne segue che $Q_h(y_i, J)$ è funzione lineare di $Q_1(y, J)$, $Q_2(y, J)$, ..., $Q_p(y, J)$; si ha cioè:

$$(4) \begin{cases} Q_1(y_i, J) = \alpha_{11}^{(i)} Q_1(y, J) + \cdots + \alpha_{1p}^{(i)} Q_p(y, J) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_p(y_i, J) = \alpha_{p1}^{(i)} Q_1(y, J) + \cdots + \alpha_{pp}^{(i)} Q_p(y, J) \\ (i = 1, 2, \ldots, s-1). \end{cases}$$

Le $Q_h(y, J)(h = 1, \ldots, p)$ sono p funzioni modulari linearmente indipendenti relative al sottogruppo considerato, e le (4) rappresentano la trasformazione che esse subiscono quando si passa da y ad y_i, cioè quando alla z si applica la sostituzione S_i. Quindi le trasformazioni (4), insieme all'identità, costituiscono un gruppo, che è oloedricamente isomorfo al gruppo G_s.

Il gruppo delle trasformazioni (4) ammette una notevole interpretazione geometrica. È noto che si chiama *curva normale di* NOETHER la curva dello spazio a $p-1$ dimensioni i cui punti hanno per coordinate omogenee $Q_1(y, J)$, ..., $Q_p(y, J)$. Ciò posto, le (4) rappresentano una collineazione in cui la curva normale si trasforma in sè stessa; e possiamo dire quindi che il gruppo G_s coincide in sostanza col gruppo delle collineazioni che trasformano in sè stessa la curva normale di NOETHER.

d) Le considerazioni precedenti non valgono più quando, essendo $p \geq 2$, la R_s è iperellittica

(ciò che avviene sempre se $p=2$). In questo caso alla R_s si può sostituire un'altra superficie di RIEMANN R'_2 a due fogli e con $2p+1$ o $2p+2$ punti di diramazione; in altre parole, si possono scegliere due funzioni u, v regolari sulla R_s e legate da una relazione della forma:

$$v^2 = \rho(u),$$

dove u è un polinomio di grado $2p+1$ o $2p+2$. Allora qualunque funzione w regolare sulla R_s ha la forma:

$$w = \frac{\lambda(u) + v\mu(u)}{\nu(u)}, \tag{5}$$

dove $\lambda(u)$, $\mu(u)$, $\nu(u)$ sono polinomi in u primi tra loro.

Indichiamo con $u(z)$ la u considerata come funzione di z, e poniamo:

$$u[S_i(z)] = u_i(z).$$

Poichè u prende ciascun valore due volte sulla R_s, lo stesso potrà dirsi di u_i, sicchè, posto per la (5):

$$u_i = \frac{\lambda(u) + v\mu(u)}{\nu(u)},$$

la funzione:

$$\lambda(u) + v\mu(u) - u_i\nu(u)$$

dovrà per ogni valore di u_i annullarsi in due punti della R_s; ma, poichè la v prende lo stesso valore in $2p+1$ o in $2p+2$ punti, e in ogni caso in più di 2 punti, dovrà mancare il termine in v, ed

inoltre, per la natura già menzionata di u, dovranno $\lambda(u)$ e $\nu(u)$ essere lineari. Concludendo dunque, la u_i è una funzione lineare fratta della u:

$$u_i = \frac{\alpha_i u + \beta_i}{\gamma_i u + \delta_i}. \tag{6}$$

Si domanda ora se le $u, u_1, \ldots, u_{s-1}$ sono o no tutte diverse, cioè se le sostituzioni lineari (6) formano, insieme all'identità, un gruppo d'ordine s o d'ordine $< s$.

Osserviamo che (art. 98), se $p > 1$, $n > 6$, sicchè nella rete che si considera intorno ad ogni nodo di 3ª specie stanno più di 6 bitriangoli. Ne segue che l'operazione S, considerata come appartenente a G_s, è d'ordine maggiore di 6. Ora i soli gruppi finiti di sostituzioni contenenti operazioni d'ordine > 6 sono certi gruppi ciclici e diedrici; ma, d'altra parte, i soli gruppi ciclici e diedrici appartenenti al tipo G_s sono quelli corrispondenti ai simboli (2, 1, 2), (2, 3, 2), (1, 3, 3) (art. 98), e questi non contengono sostituzioni di ordine 6. Ne segue che il gruppo delle (6) non può essere G_s, e quindi che le $u, u_1, \ldots, u_{s-1}$ non sono tutte diverse.

Esiste dunque una trasformazione non identica di C_s in sè stesso, cui corrisponde la trasformazione di u in sè stessa, cioè uno scambio dei due fogli della R'_2 tra loro; e, come si comprende, nessun'altra trasformazione può esistere che abbia la

stessa proprietà. Ne segue che l'ordine del gruppo delle (6) è $\frac{s}{2}$. Combinando questo gruppo $G_{\frac{s}{2}}$ colla sostituzione $v' = -v$ si ottiene il gruppo G_s.

Il gruppo $G_{\frac{s}{2}}$ è di genere zero, perchè, prendendo u ogni valore una sola volta sulla riemanniana corrispondente, questa può ridursi ad un piano.

Il poligono generatore di $\Gamma_{\frac{s}{2}}$ è l'insieme dei bitriangoli di C_s che, nella trasformazione di C_s in R_s e poscia in R'_2, vanno a costituire un foglio della R'_2. Il sottogruppo $\Gamma_{\frac{s}{2}}$ è invariante, perchè, essendo le u_i funzioni razionali di u, esse appartengono tutte allo stesso gruppo.

Siccome poi il numero dei bitriangoli che stanno intorno ad un nodo di 3^a specie nella superficie C_s è > 6, così per $C_{\frac{s}{2}}$ si avrà $n > 3$, sicchè dovrà essere $n = 4$ o $n = 5$. Corrispondentemente si ha $\frac{s}{2} = 24$, $\frac{s}{2} = 60$.

Dunque i soli casi possibili, se la R_s è iperellittica, sono $s = 48$, 120, $n = 8$, 10. La formola (2) dell'art. 98, in cui deve porsi n in luogo di r, ci dà poi nei due casi $p = 2$ e $p = 5$.

134. Stabilita l'esistenza delle funzioni modulari per qualunque sottogruppo, dobbiamo passare alla costruzione della loro espressione effettiva in alcuni casi semplici.

Si sa dalla teoria delle funzioni ellittiche, che, se $2z_1$, $2z_2$ e $2z_1'$, $2z_2'$ sono due coppie di periodi primitivi, si ha:

$$\sigma(u \mid z_1', z_2') = \sigma(u \mid z_1, z_2), \tag{1}$$

inoltre, m_1, m_2 indicando due numeri interi qualunque:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(u + 2m_1 z_1 + 2m_2 z_2) \\ &= (-1)^{m_1 m_2 + m_1 + m_2} e^{2(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)(u + m_1 z_1 + m_2 z_2)}\, \sigma u, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dove:

$$\eta_i = \zeta z_i \qquad (i = 1,\ 2).$$

Tra le z_i e le η_i ha luogo la nota relazione:

$$z_1 \eta_2 - z_2 \eta_1 = \frac{\pi i}{2}, \tag{3}$$

nell'ipotesi già fatta che la parte imaginaria di $\frac{z_1}{z_2} = z$ sia positiva.

Facciamo in particolare, n essendo un numero intero:

$$z_1' = z_1 + n z_2, \quad z_2' = z_2, \tag{4}$$

e nella (1) poniamo:

$$u = \frac{2z_1'}{n} = \frac{2z_1}{n} + 2z_2;$$

avremo, per la (2):

$$(5)\quad \begin{cases} \left(\sigma \dfrac{2\zeta_1'}{n} \middle| \zeta_1', \zeta_2'\right) = \sigma\left(\dfrac{2\zeta_1'}{n} \middle| \zeta_1, \zeta_2\right) \\ \qquad = \sigma\left(\dfrac{2\zeta_1}{n} + 2\zeta_2 \middle| \zeta_1, \zeta_2\right) \\ \qquad = -e^{2\eta_2\left(\frac{2\zeta_1}{n}+\zeta_2\right)}\sigma\left(\dfrac{2\zeta_1}{n} \middle| \zeta_1, \zeta_2\right). \end{cases}$$

Ora, tenuto conto che:

$$\eta_1' = \eta_1 + n\eta_2,$$

si ha:

$$\zeta_1'\eta_1' = (\zeta_1 + n\zeta_2)(\eta_1 + n\eta_2)$$
$$= \zeta_1\eta_1 + n(\zeta_1\eta_2 + \zeta_2\eta_1) + n^2\zeta_2\eta_2,$$

e per la (3):

$$\zeta_1'\eta_1' = \zeta_1\eta_1 + 2n\zeta_1\eta_2 + n^2\zeta_2\eta_2 - \frac{n\pi i}{2},$$

da cui:

$$2\eta_2\left(\frac{2\zeta_1}{n} + \zeta_2\right) + \pi i = \frac{2\zeta_1'\eta_1'}{n^2} - \frac{2\zeta_1\eta_1}{n^2} + \frac{n+1}{n}\pi i.$$

Ne segue, per la (5):

$$e^{-\frac{2\zeta_1'\eta_1'}{n^2}}\sigma\left(\frac{2\zeta_1'}{n} \middle| \zeta_1', \zeta_2\right) = e^{\frac{n+1}{n}\pi i}e^{-\frac{2\zeta_1\eta_1}{n^2}}\sigma\left(\frac{2\zeta_1}{n} \middle| \zeta_1, \zeta_2\right).$$

Se n è pari, $e^{\frac{n+1}{n}\pi i} = e^{\frac{n+1}{2n}2\pi i}$ è una radice dell'unità d'ordine $2n$; invece, se n è dispari, posto $n = 2p + 1$, si ha $e^{\frac{n+1}{n}\pi i} = e^{\frac{p+1}{n}2\pi i}$, che è una radice dell'unità d'indice n al massimo. Può dirsi dunque che per la sostituzione (4), ossia S^n, la funzione:

$$e^{-\frac{2\zeta_1\eta_1}{n^2}}\sigma\left(\frac{2\zeta_1}{n}\middle|\zeta_1,\ \zeta_2\right)$$

si moltiplica per una radice n-esima o $2n$-esima dell'unità secondochè n è dispari o pari.

Poniamo ora:

$$(6)\quad \begin{cases} \sigma_{hk}(u|\zeta_1,\ \zeta_2)= \\ e^{\frac{2h\eta_1+2k\eta_2}{n}\left(u-\frac{h\zeta_1+k\zeta_2}{n}\right)}\sigma\left(u-\frac{2h\zeta_1+2k\zeta_2}{n}\middle|\zeta_1,\ \zeta_2\right), \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \sigma_{hk}(0|\zeta_1,\ \zeta_2)= \\ -e^{-\frac{2(h\eta_1+k\eta_2)(h\zeta_1+k\zeta_2)}{n^2}}\sigma\left(\frac{2h\zeta_1+2k\zeta_2}{n}\middle|\zeta_1,\zeta_2\right) \\ =\sigma_{hk}(\zeta_1,\ \zeta_2), \end{cases}$$

ed applichiamo alle ζ_1, ζ_2 la sostituzione omogenea:

$$(8)\ V=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}an+1 & bn\\ cn & dn+1\end{pmatrix}\equiv 1\ (\text{mod}\ n),$$

indicando con $\sigma'_{hk}u$ ciò che diviene $\sigma_{hk}u$ per questa sostituzione. Osservando che:

$$\eta'_1=\alpha\eta_1+\beta\eta_2=(an+1)\eta_1+bn\eta_2,$$
$$\eta'_2=\gamma\eta_1+\delta\eta_2=cn\eta_1+(dn+1)\eta_2,$$

e ponendo per brevità:

$$ha+kc=L,\quad hb+kd=M,$$
$$h\eta_1+k\eta_2=\eta,\quad h\zeta_1+k\zeta_2=\zeta,$$
$$L\eta_1+M\eta_2=\text{H},\quad L\zeta_1+M\zeta_2=Z,$$

si ha dalla (6), tenuto conto della (1):

$$\sigma'_{hk}u=e^{2\left(\text{H}+\frac{\eta}{n}\right)\left(u-Z-\frac{\zeta}{n}\right)}\sigma\left(u-2Z-\frac{2\zeta}{n}\middle|\zeta_1,\ \zeta_2\right).$$

Ora, per la (2):

$$\sigma\left(u - 2Z - \frac{2\zeta}{n}\right)$$

$$= (-1)^{LM+L+M} e^{-2H\left(u-Z-\frac{2\zeta}{n}\right)} \sigma\left(u - \frac{2\zeta}{n}\right),$$

e per la (6):

$$\sigma\left(u - \frac{2\zeta}{n}\right) = e^{-\frac{2\eta}{n}\left(u-\frac{\zeta}{n}\right)} \sigma_{hk} u;$$

quindi si ha, riducendo:

$$\sigma'_{hk} u = (-1)^{LM+L+M} e^{\frac{2}{n}(H\zeta - \eta Z)} \sigma_{hk} u.$$

Inoltre:

$$LM + L + M = h^2 ab + hk(ad + bc)$$
$$+ k^2 cd + h(a + b) + k(c + d),$$

quindi, tenuto conto che:

$$(-1)^h = (-1)^{h^2}, \quad (-1)^k = (-1)^{k^2},$$

si ha:

$$(-1)^{LM+L+M} = (-1)^{h^2(ab+a+b)+hk(ad+bc)+k^2(cd+c+d)};$$

d'altra parte, per la (3):

$$H\zeta - \eta Z = (L\eta_1 + M\eta_2)(h\zeta_1 + k\zeta_2)$$
$$-(h\eta_1 + k\eta_2)(L\zeta_1 + M\zeta_2)$$

$$= (Mh - Lk)(\zeta_1\eta_2 - \zeta_2\eta_1) = (Mh - Lk)\frac{\pi i}{2}$$

$$= [h^2 b + hk(d - a) - k^2 c]\frac{\pi i}{2}.$$

Dunque:

$$(9)\left\{\begin{aligned} \sigma'_{hk}u &= (-1)^{h^2(ab+a+b)+hk(ad+bc)+k^2(cd+c+d)}\times \\ &\qquad \times e^{\frac{\pi i}{n}[h^2b+hk(d-a)-k^2c]}\,\sigma_{hk}u \\ &= e^{\frac{\pi i}{n}[h^2(nab+na+nb+b)+hk(nad+nbc+d-a)+k^2(ncd+nc+nd-c)]}\,\sigma_{hk}u. \end{aligned}\right.$$

Pertanto per le sostituzioni (8), ossia per le sostituzioni del gruppo omogeneo $\Gamma_{2\mu(n)}$, $\sigma_{hk}u$ varia d'una radice dell'unità, e quindi una certa potenza di $\sigma_{hk}u$ resta invariata. In altre parole, la $\sigma^r_{hk}u$, dove r è un certo numero intero, è una forma invariante rispetto al gruppo omogeneo $\Gamma_{2\mu(n)}$.

135. Vediamo ora quali tra le sostituzioni (8) lasciano invariate tutte le $\sigma_{hk}u$.

Dalla:

$$\begin{aligned} 1 = \alpha\delta - \beta\gamma &= (an+1)(dn+1) - bcn^2 \\ &= (ad-bc)n^2 + (a+d)n + 1 \end{aligned}$$

segue:

$$(1)\qquad n(ad-bc)+a+d=0.$$

a) Sia n dispari. Allora dalla (1) segue:

$$ad+bc \equiv ad-bc \equiv -(a+d) \equiv d-a \pmod 2.$$

D'altra parte, scrivendo la (1) così:

$$d(an+1)+a-bcn = a(dn+1)+d-bcn = 0,$$

si vede che, se a è dispari, o se d è dispari, devono esserlo anche b e c, sicchè i prodotti $a(b+1)$ e $d(c+1)$ sono sempre pari:

$$ab+a \equiv dc+d \equiv 0 \pmod{2}.$$

Dopo ciò la (9) dell'art. prec. può scriversi:

$$\sigma'_{hk}u = (-1)^{h^2b+hk(d-a)-k^2c}\,e^{\frac{\pi i}{n}[h^2b+hk(d-a)-k^2c]}\,\sigma_{hk}u,$$

ossia:

$$(2) \qquad \sigma'_{hk} u = e^{\pi i \frac{n-1}{n} [-h^2 b + hk(a-d) + k^2 c]} \sigma_{hk} u.$$

Perchè tutte le $\sigma_{hk} u$ restino invariate, è necessario e sufficiente (tenuto conto che $n - 1$ è pari) che la quantità tra parentesi quadre sia un multiplo di n per qualunque sistema di valori di h, k, cioè che sia:

$$b \equiv c \equiv a - d \equiv 0 \pmod{n}.$$

D'altra parte segue dalla (1):

$$a + d \equiv 0 \pmod{n},$$

quindi:

$$a \equiv b \equiv c \equiv d \equiv 0 \pmod{n}.$$

Possiamo scrivere pertanto, a', b', c', d' essendo numeri interi:

$$a = a'n, \quad b = b'n, \quad c = c'n, \quad d = d'n;$$

abbiamo allora:

$$V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'n^2 + 1 & b'n^2 \\ c'n^2 & d'n^2 + 1 \end{pmatrix} \equiv 1 \pmod{n^2}.$$

Cioè: *Per n dispari le sostituzioni di* Γ * *che lasciano invariate tutte le $\sigma_{hk} u$ sono quelle che costituiscono il sottogruppo omogeneo* $\Gamma_{2\mu(n^2)}$.

b) Sia ora n pari. Perchè tutte le $\sigma_{hk} u$ restino invariate, la quantità tra parentesi quadre nell'ultima espressione (9) dell'art. prec. dovrà es-

---

* Più esattamente dovrebbe dirsi: del gruppo omogeneo corrispondente al gruppo non omogeneo Γ.

sere multipla di $2n$ per tutte le coppie di valori h, k, quindi dovrà essere:

$$(3) \quad \begin{cases} nab + na + nb + b \equiv 0 \\ nad + nbc + d - a \equiv 0 \\ ncd + nc + nd - c \equiv 0 \end{cases} \pmod{2n}.$$

Aggiungendo alla seconda di queste congruenze la congruenza $-2nbc \equiv 0 \pmod{2n}$, essa diviene:

$$n(ad - bc) + d - a \equiv 0 \pmod{2n};$$

da questa e dalla (1) segue:

$$a \equiv d \equiv 0 \pmod{n}.$$

La prima delle (3) diviene allora, indicando con l un numero intero:

$$n^2 l + (n+1)b \equiv 0 \pmod{2n},$$

ossia, tenuto conto che, per essere n pari, n^2 è divisibile per $2n$:

$$(n+1)b \equiv 0 \pmod{2n},$$

da cui, essendo $n+1$ dispari:

$$b \equiv 0 \pmod{2n}.$$

In modo analogo risulta dall'ultima delle (3):

$$c \equiv 0 \pmod{2n}.$$

Possiamo scrivere quindi, a', b', c', d' essendo interi:

$$a = a'n, \quad b = 2b'n, \quad c = 2c'n, \quad d = d'n,$$

ed abbiamo allora dalla seconda delle (3):

$$n^3(a'd' + 4b'c') + n(d' - a') \equiv 0 \pmod{2n},$$

ossia:

$$d' - a' \equiv 0 \pmod{2}.$$

Posto pertanto:

$$a' = 2a'' + \eta,$$

dove η ha uno dei valori 0, 1, sarà anche:

$$d' = 2d'' + \eta,$$

ed avremo:

$$V = \begin{bmatrix} (2a'' + \eta)n^2 + 1 & 2b'n^2 \\ 2c'n^2 & (2d'' + \eta)n^2 + 1 \end{bmatrix},$$

ossia:

$$V \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2n^2},$$

o:

$$V \equiv \begin{pmatrix} n^2 + 1 & 0 \\ 0 & n^2 + 1 \end{pmatrix} \pmod{2n^2},$$

sostituzioni che definiscono un sottogruppo omogeneo d'indice $\mu(2n^2)$. Dunque:

Per n pari, le sostituzioni di Γ che lasciano invariate tutte le $\sigma_{hk}u$ formano un sottogruppo omogeneo $\Gamma_{\mu(2n^2)}$.

136. Una questione diversa dalla precedente è quella della ricerca delle sostituzioni di Γ che lasciano invariata una singola $\sigma_{hk}u$. Per trattare questo problema, costruiamo anzitutto l'equazione di periodicità della $\sigma_{hk}u$ rispetto agli indici.

Dalla (6) dell'art. 134 segue:

$$(1)\quad \sigma_{h+pn,k+qn}u = e^{\left(\frac{2\eta}{n}+2\eta'\right)\left(u-\frac{\zeta}{n}-\zeta'\right)}\sigma\left(u - \frac{2\zeta}{n} - 2\zeta'\right),$$

dove η, ζ hanno ancora il significato loro attribuito

nell'art. citato, e inoltre:

$$\eta' = p\eta_1 + q\eta_2, \quad \zeta' = p\zeta_1 + q\zeta_2.$$

D'altra parte dalla (2) dello stesso art. si ha:

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma\left(u - \frac{2\zeta}{n} - 2\zeta'\right) \\ = (-1)^{pq+p+q} e^{-2\eta'\left(u - \frac{2\zeta}{n} - \zeta'\right)} \sigma\left(u - \frac{2\zeta}{n}\right), \end{cases}$$

e di più la (6) può scriversi:

$$(3) \qquad \sigma\left(u - \frac{2\zeta}{n}\right) = e^{-\frac{2\eta}{n}\left(u - \frac{\zeta}{n}\right)} \sigma_{hk} u.$$

Moltiplicando fra loro le (1), (2), (3), ed osservando che, per la (3) dell'art. cit., si trova:

$$\eta'\zeta - \eta\zeta' = \frac{\pi i}{2}(-pk + qh),$$

risulta:

$$(4) \quad \sigma_{h+pn,k+qn} u = (-1)^{pq+p+q} e^{-\frac{\pi i}{n}(pk-qh)} \sigma_{hk} u,$$

che può anche scriversi:

$$(5) \quad \sigma_{h+pn,k+qn} u = (-1)^{p^2+pq+q^2} e^{-\frac{\pi i}{n}(pk-qh)} \sigma_{hk} u.$$

Di qui si vede che, se si aggiungono agli indici di $\sigma_{hk} u$ dei multipli di n, la funzione resta invariata a meno d'un fattore costante che è una radice dell'unità. Basta quindi considerare le $\sigma_{hk} u$ in cui le h, k sono rispettivamente incongrue rispetto ad n.

Un'altra formola importante è la seguente, dove α, β, γ, δ sono gli elementi d'una sostitu-

zione modulare qualunque:

$$(6)\quad \sigma_{h\alpha+k\gamma,h\beta+k\delta}(z_1, z_2) = \sigma_{hk}(\alpha z_1 + \beta z_2, \gamma z_1 + \delta z_2).$$

Essa si ottiene immediatamente dalla (7) dell'art. 134, tenendo conto della (1) dello stesso art.

Dopo ciò, se una sostituzione modulare $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ muta la $\sigma_{hk}(z_1, z_2)$ in sè stessa, cioè è tale che si abbia identicamente:

$$\sigma_{hk}(\alpha z_1 + \beta z_2, \gamma z_1 + \delta z_2) = \sigma_{hk}(z_1, z_2),$$

si avrà anche, per la (6):

$$\sigma_{h\alpha+k\gamma,h\beta+k\delta}(z_1, z_2) = \sigma_{hk}(z_1, z_2).$$

Ne segue che deve essere:

$$h\alpha + k\gamma = h, \quad h\beta + k\delta = k,$$

donde:

$$\frac{h}{k} = \frac{-\gamma}{\alpha - 1} = \frac{\delta - 1}{-\beta},$$

e quindi:

$$(\alpha - 1)(\delta - 1) - \beta\gamma = 0,$$

che, insieme alla:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

ci dà:

$$\alpha + \delta = 2.$$

Dunque la sostituzione considerata è parabolica (art. 25).

Poniamo $\alpha = 1 + \theta$, quindi $\delta = 1 - \theta$; sarà, indicando con d il massimo comun divisore di h, k, e ponendo $h = dh'$, $k = dk'$:

$$\frac{h'}{k'} = \frac{-\gamma}{\theta} = \frac{\theta}{\beta},$$

quindi, λ, μ essendo due interi:

$$-\gamma=\lambda h', \quad \theta=\lambda k'=\mu h', \quad \beta=\mu k'.$$

Dalla relazione $\lambda k'=\mu h'$ segue, essendo h', k' primi tra loro:

$$\lambda=r h', \quad \mu=r k',$$

quindi:

$$\alpha=1+rh'k', \quad \beta=rk'^2, \quad \gamma=-rh'^2, \quad \delta=1-rh'k'.$$

La sostituzione considerata $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ è dunque (art. 91) la potenza r-esima della sostituzione parabolica di ampiezza 1:

$$V=\begin{pmatrix}1+h'k' & k'^2\\ -h'^2 & 1-h'k'\end{pmatrix}.$$

Supponiamo che i tre numeri h, k, n non abbiano alcun divisore comune.

Allora due potenze di V saranno congruenti rispetto ad n sempre e soltanto se lo sono i loro esponenti. Infatti, se $V^s\equiv V^t$, cioè se:

$$1+s h' k'\equiv 1+t h' k', \quad s k'^2\equiv t k'^2,$$
$$-s h'^2\equiv -t h'^2, \quad 1-s h' k'\equiv 1-t h' k' \pmod n,$$

ne segue necessariamente, nell'ipotesi fatta, $s\equiv t \pmod n$; e reciprocamente, se sussiste questa relazione, sussistono anche le precedenti, e si ha $V^s\equiv V^t$.

Pertanto le sole potenze di V diverse tra loro sono 1, V, V^2, ..., V^{n-1}.

Combinando queste sostituzioni con quelle che lasciano invariate tutte le σ_{hk}, si ottengono tutte

le sostituzioni che lasciano invariata la σ_{hk} considerata.

I sottogruppi che così risultano sono tra loro equivalenti, giacchè il sottogruppo formato dalle sostituzioni che lasciano invariate tutte le σ_{hk} è invariante, e i sottogruppi come $1, V, V^2, \ldots, V^{n-1}$ sono tutti tra loro equivalenti, essendo tali tutte le sostituzioni paraboliche di ampiezza uno (art. 91).

Vogliamo determinare il numero delle funzioni σ_{hk} in cui h, k, n non hanno fattori comuni.

Sia p_1 un fattore primo di n. Per formare una coppia di numeri h, k minori di n e non contenenti ambidue il fattore p_1, si può combinare uno degli $\frac{n}{p_1}$ numeri minori di n e divisibili per p_1 con uno degli $\left(n - \frac{n}{p_1}\right)$ rimanenti, oppure uno di questi ultimi con uno qualunque degli n numeri minori di n, sicchè si hanno in tutto:

$$\frac{n}{p_1}\left(n - \frac{n}{p_1}\right) + \left(n - \frac{n}{p_1}\right)n = n^2\left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)$$

combinazioni. Ora, se p_2 è un fattore primo di n diverso da p_1, fra gli $\frac{n}{p_1}$, $\left(n - \frac{n}{p_1}\right)$, n numeri considerati ve ne hanno rispettivamente $\frac{n}{p_1 p_2}$, $\frac{1}{p_2}\left(n - \frac{n}{p_1}\right)$, $\frac{n}{p_2}$ divisibili per p_2, sicchè tra le

combinazioni formate ve ne saranno:

$$\frac{n}{p_1 p_2^2}\left(n-\frac{n}{p_1}\right)+\left(n-\frac{n}{p_1}\right)\frac{n}{p_2^2}=\frac{n^2}{p_2^2}\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)$$

costituite da due numeri divisibili per p_2; restano quindi:

$$n^2\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)-\frac{n^2}{p_2^2}\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)=n^2\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)$$

combinazioni di due numeri non aventi per fattore comune nè p_1 nè p_2. Così continuando, si conclude che il numero delle combinazioni di due numeri h, k minori di n e tali che h, k, n non abbiano alcun fattore comune è:

$$(7)\quad n^2\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r^2}\right),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_r$ essendo i fattori primi differenti di n. Posto, come si usa nella teoria dei numeri:

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)\ *,$$

inoltre:

$$\psi(n)=n\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_r}\right),$$

la (7) può scriversi $\varphi(n)\psi(n)$. Con questa notazione si ha:

$$\mu(n)=\frac{n}{2}\varphi(n)\psi(n).$$

*) Come è noto, $\varphi(n)$ esprime il numero dei numeri minori di n e primi con n.

Dopo ciò calcoliamo il numero dei sottogruppi equivalenti al sottogruppo che lascia invariata una σ_{hk}. Poichè questo si ottiene combinando V e le sue potenze col sottogruppo che lascia invariate tutte le σ_{hk}, e poichè quest'ultimo consta di sostituzioni tutte $\equiv 1 \pmod n$, al sottogruppo considerato di Γ corrisponderà in $G_{\mu(n)}$ il sottogruppo $(1, V, \ldots, V^{n-1})$. Per risolvere il problema propostoci cercheremo quindi di determinare il massimo sottogruppo di $G_{\mu(n)}$ in cui $(1, V, \ldots, V^{n-1})$ è contenuto come sottogruppo invariante. Consideriamo per semplicità la σ_{01} *), sicchè $h = 0$, $k = 1$, quindi $h' = 0$, $k' = 1$, e:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S.$$

Se $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ è permutabile col gruppo $(1, S, S^2, \ldots, S^{n-1})$, si ha:

$$U^{-1} S U = S^r,$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha\gamma & \alpha^2 \\ -\gamma^2 & 1 + \alpha\gamma \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod n.$$

Ne segue:

$$(8) \quad 1 - \alpha\gamma \equiv 1 + \alpha\gamma \equiv \pm 1, \quad \gamma^2 \equiv 0 \pmod n;$$

---

*) È quasi superfluo avvertire che il ragionamento vale per qualunque coppia di valori h, k.

sommando le due prime, si ha:

$$2 \equiv \pm 2 \pmod{n},$$

sicchè, se $n > 4$, deve prendersi il segno superiore, e dalle (8) risulta:

$$\alpha\gamma \equiv 0 \pmod{n}.$$

Moltiplichiamo questa congruenza per δ e l'ultima delle (8) per $-\beta$ e sommiamo; tenuto conto che $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, avremo:

$$\gamma \equiv 0 \pmod{n},$$

quindi:

$$\alpha\delta \equiv 1 \pmod{n}.$$

Ad α può darsi dunque uno qualunque dei $\varphi(n)$ valori incongruenti primi con n, e per ciascuno di questi δ resta determinato; β poi è del tutto arbitrario, cioè può prendere n valori. Pertanto il numero delle sostituzioni U permutabili con S è $n\varphi(n)$; esse si riducono ad $\frac{1}{2}n\varphi(n)$, dovendosi considerare come eguali due sostituzioni i cui elementi sono eguali ed opposti. Ne segue che il numero dei sottogruppi diversi equivalenti al sottogruppo che lascia invariata una σ_{hk} è $\mu(n):\frac{1}{2}n\varphi(n)$, ossia $\psi(n)$.

Dunque: *Le σ_{hk}, per cui h, k, n non hanno alcun divisore comune, sono in numero di $\varphi(n)\psi(n)$, e si dividono in $\psi(n)$ sistemi, ciascuno dei quali*

consta di $\varphi(n)$ funzioni invarianti rispetto ad uno stesso sottogruppo di Γ *.

Abbiano ora h, k, n un divisore comune t. Posto:

$$h = th', \quad k = tk', \quad n = tn',$$

si ha dalla (6) dell'art. 134:

$$\sigma_{hk}(u \mid \zeta_1, \zeta_2)$$
$$= e^{\frac{2h'\eta_1 + 2k'\eta_2}{n'}\left(u - \frac{h'\zeta_1 + k'\zeta_2}{n'}\right)} \sigma\left(u - \frac{2h'\zeta_1 + 2k'\zeta_2}{n'} \middle| \zeta_1, \zeta_2\right),$$

sicchè nel caso considerato la σ_{hk} può considerarsi come una $\sigma_{h'k'}$ relativa al divisore n'. Dunque: *Le σ_{hk}, per cui h, k, n hanno il massimo comun divisore $t > 1$, sono in numero di $\varphi\left(\frac{n}{t}\right)\psi\left(\frac{n}{t}\right)$, e si dividono in $\psi\left(\frac{n}{t}\right)$ sistemi, ciascuno dei quali consta di $\varphi\left(\frac{n}{t}\right)$ funzioni invarianti rispetto ad uno stesso sottogruppo di* Γ.

---

*) Queste conclusioni valgono anche per $n = 3$; valgono pure per $n = 2$, giacchè in questo caso è indifferente prendere l'uno o l'altro segno nella prima delle (8). Per $n = 4$, oltre le soluzioni ottenute col ragionamento del testo, se ne ottengono altre due prendendo nella prima delle (8) il segno inferiore, e cioè:

$$\alpha = 1, \quad \beta = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 1.$$

137. Anche le potenze n-esime delle σ_{hk} sono funzioni invarianti rispetto a certi sottogruppi di Γ.

Si ha, per n dispari, dalla (2) dell'art. 135:

$$[\sigma'_{hk} u]^n = e^{(n-1)\pi i[-h^2 b + hk(a-d) + k^2 c]} [\sigma_{hk} u]^n,$$

ossia, poichè $n - 1$ è pari:

$$[\sigma'_{hk} u]^n = [\sigma_{hk} u]^n.$$

Per n pari, la (9) dell'art. 134 ci dà immediatamente:

$$[\sigma'_{hk} u]^{2n} = [\sigma_{hk} u]^{2n}.$$

Cioè: Le sostituzioni $V \equiv 1 \pmod n$ lasciano invariate le funzioni $[\sigma_{hk} u]^{2n}$, e, se n è dispari, anche le $[\sigma_{hk} u]^n$.

138. Le funzioni σ_{hk} sin qui considerate sono funzioni omogenee, ossia *forme*, di z_1, z_2, di grado 1.

Ricordiamo la formola:

$$\sigma u = \frac{2z_2}{\pi} e^{\frac{\eta_2 u^2}{2z_2}} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{2z_2} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi u}{2z_2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{j\pi z_1}{z_2}} \right).$$

Posto, come innanzi:

$$h\eta_1 + k\eta_2 = \eta, \quad hz_1 + kz_2 = z,$$

abbiamo di qui e dalla (7) dell'art. 134:

$$\sigma_{hk}(z_1, z_2) = -e^{-\frac{2\eta z}{n^2}} \frac{2z_2}{\pi} e^{\frac{2\eta_2 z^2}{n^2 z_2}} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{nz_2} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{nz_2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{j\pi z_1}{z_2}} \right);$$

ossia, tenendo conto della (3) dell'art. stesso:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sigma_{hk}(z_1, z_2) = \\ &-\frac{2z_2}{\pi} e^{\frac{h\pi i z}{n^2 z_2}} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{n z_2} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{n z_2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{j \pi z_1}{z_2}} \right). \end{aligned} \right.$$

Come si vede, tranne il fattore z_2, tutti gli altri dipendono solo dal rapporto $\frac{z_1}{z_2}$, il che prova l'asserto.

Pertanto, prendendo i quozienti di potenze eguali delle σ_{hk}, avremo delle funzioni di $\frac{z_1}{z_2}$ invarianti per certi sottogruppi di Γ, cioè delle funzioni modulari.

139. Per la ristrettezza dello spazio, dobbiamo limitarci ad applicare le considerazioni esposte ad un solo esempio, ed al più semplice di tutti: quello delle funzioni invarianti rispetto al sottogruppo Γ_6. In questo caso $n = 2$, quindi possiamo dire che le σ_{hk}^4 sono forme invarianti, e i loro rapporti funzioni invarianti.

Noi ci proponiamo di esprimere mediante queste funzioni invarianti una funzione invariante λ che vogliamo ora definire.

Sappiamo che (art. 131), se:

$$(1)\qquad Z = \frac{(z'^3 + 1)^2}{4z'^3}, \quad Z = J(z),$$

z' è funzione uniforme di z, e più precisamente una funzione modulare appartenente al sottogruppo Γ_6. La stessa cosa può dirsi evidentemente se, invece delle (1), si hanno le:

$$(2) \qquad Z' = \frac{(z'^3 + 1)^2}{4z'^3}, \quad Z = J(z),$$

dove Z e Z' sono esprimibili razionalmente l'una per l'altra, cioè sono funzioni lineari l'una dell'altra. Noi supporremo:

$$(3) \qquad Z' = \frac{Z - 1}{Z};$$

inoltre invece di z' introdurremo una sua funzione lineare λ. Questa sarà ancora una funzione modulare relativa al gruppo Γ_6.

La relazione che supponiamo esistere fra z' e λ è:

$$(4) \qquad z' = \frac{\lambda + e^{\frac{4\pi i}{3}}}{\lambda + e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{\lambda + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}{\lambda + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}.$$

Mediante le (3), (4) la prima delle (2) diviene:

$$\frac{Z - 1}{Z} = \frac{(2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2}{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}.$$

Se ne deduce facilmente:

$$Z = \frac{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{27\lambda^2(\lambda - 1)^2},$$

sicchè può scriversi:

$$Z-1:Z:1$$
$$=(2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2)^2:4(\lambda^2-\lambda+1)^3:27\lambda^2(\lambda-1)^2,$$

od anche, per essere $Z=J$:

$$27\,g_3^2:g_2^3:\Delta$$
$$=(2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2)^2:4(\lambda^2-\lambda+1)^3:27\lambda^2(\lambda-1)^2.$$

Da queste formole si vede che i valori di λ corrispondenti ad $J=\infty$ sono $\lambda=1, 0, \infty$. Ora, poichè i nodi della rete di Γ_6 sono tutti punti dell'asse reale, cioè omologhi rispetto a Γ al punto all'infinito, e poichè per $z=\infty$ si ha $J=\infty$, ne segue che in tutti i nodi della rete di Γ_6 si ha $J=\infty$, e quindi che in questi nodi λ prende i tre valori $1, 0, \infty$. Fra i nodi della rete considerata vi sono i punti $z=1, 0, \infty$; quindi può concludersi che ai valori $1, 0, \infty$ di z corrispondono i valori $1, 0, \infty$ di λ. L'ordine di corrispondenza di questi valori è arbitrario, giacchè z', e quindi λ, non è stato definito in modo unico, ma soltanto come radice d'un'equazione algebrica; fissando in un modo qualunque tale ordine, noi verremo ad individuare λ. Noi stabiliremo:

$$(5)\qquad \lambda(1)=1,\quad \lambda(0)=0,\quad \lambda(\infty)=\infty.$$

Se a z si fa subire una sostituzione modulare, λ si muta in un'altra radice dell'equazione che lo lega a J; ma, essendo Γ_6 di genere zero (art. 98), tutte le radici dell'equazione sono (art. 133, *a*) funzioni lineari d'una di esse. In altre parole ad ogni

sostituzione modulare di z corrisponde una sostituzione lineare di λ.

Cerchiamo le sostituzioni di λ corrispondenti alle sostituzioni S, T di z. Sieno esse $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, sicchè:

$$(6)\quad \lambda(z+1) = \frac{a\lambda(z)+b}{c\lambda(z)+d}, \quad \lambda\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{a'\lambda(z)+b'}{c'\lambda(z)+d'}.$$

Poniamo in queste relazioni successivamente $z = 1, 0, \infty$; avremo, tenendo conto delle (5) ed osservando che $\lambda(2) = \lambda(0)$, $\lambda(-1) = \lambda(1)$:

$$0 = \frac{a+b}{c+d}, \quad 1 = \frac{b}{d}, \quad \infty = \frac{a}{c};$$

$$1 = \frac{a'+b'}{c'+d'}, \quad \infty = \frac{b'}{d'}, \quad 0 = \frac{a'}{c'},$$

e di qui:

$a = -b = -d$, $c = 0$; $a' = d' = 0$, $b' = c'$,

sicchè può porsi:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e le (6) divengono:

$$\lambda(z+1) = -\lambda(z) + 1, \quad \lambda\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\lambda(z)}.$$

Le sostituzioni $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ genereranno un gruppo isomorfo oloedricamente al gruppo G_6, cioè un gruppo diedrico. Le 6 sostituzioni di questo gruppo sono:

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$ST=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad TS=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad STS=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Quindi, se si indica semplicemente con λ uno dei valori di λ corrispondenti ad un determinato valore di J, i 6 valori di λ corrispondenti a quel valore di J, ossia le 6 radici dell'equazione:

$$J=\frac{4(\lambda^2-\lambda+1)^3}{27\lambda^2(\lambda-1)^2}$$

saranno:

$$\lambda,\quad -\lambda+1,\quad \frac{1}{\lambda},\quad \frac{1}{-\lambda+1},\quad \frac{\lambda-1}{\lambda},\quad \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Poniamo:

$$\lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

precisando meglio le λ_1, λ_2 come segue:

$$(7)\qquad \lambda_1=-e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{2z_2}{\sqrt{\pi}}\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda'}},\qquad \lambda_2=-e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{2z_2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\lambda'}},$$

dove λ' rappresenta la derivata di λ rispetto a z. Avremo:

$$27g_3^2:g_2^3:\Delta=(2\lambda_1^3-3\lambda_1^2\lambda_2-3\lambda_1\lambda_2^2+2\lambda_2^3)^2:$$
$$4(\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)^3:27\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1-\lambda_2)^2,$$

ossia, indicando con h un fattore da determinarsi:

$$(8)\qquad \begin{cases} 27hg_3^2=(2\lambda_1^3-3\lambda_1^2\lambda_2-3\lambda_1\lambda_2^2+2\lambda_2^3)^2\\ hg_2^3=4(\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)^3\\ h\Delta=27\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1-\lambda_2)^2.\end{cases}$$

Poichè le λ_1, λ_2 sono forme di 1° grado nelle

z_1, z_2, mentre le g_2, g_3, Δ sono rispettivamente (art. 129) di grado — 4, — 6, — 12, risulta che h è una forma di grado 18.

Per determinare questa forma, dobbiamo trovare le sostituzioni lineari omogenee che subiscono λ_1, λ_2 quando λ subisce le sostituzioni $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$.

Sia in generale $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la sostituzione che subisce λ quando a z si applica la sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, sicchè:

$$(9) \qquad \lambda\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \frac{a\lambda(z) + b}{c\lambda(z) + d}.$$

Derivando si ha (supposto $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$):

$$\frac{1}{(\gamma z + \delta)^2}\lambda'\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \frac{ad - bc}{[c\lambda(z) + d]^2}\lambda'(z),$$

ossia:

$$(10) \qquad \pm\frac{\sqrt{ad - bc}(\gamma z + \delta)}{\sqrt{\lambda'\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)}} = \frac{c\lambda(z) + d}{\sqrt{\lambda'(z)}}.$$

Ora dalla seconda delle (7) segue:

$$\lambda_2(\alpha z_1 + \beta z_2, \gamma z_1 + \delta z_2)$$
$$= -e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\gamma z_1 + \delta z_2)\frac{1}{\sqrt{\lambda'\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)}},$$

quindi per la (10), tenuto conto delle (7):

$$(11)\ \begin{cases} \pm\sqrt{ad-bc}\,\lambda_2(\alpha z_1+\beta z_2,\ \gamma z_1+\delta z_2) \\ \qquad = c\lambda_1(z_1,\ z_2)+d\lambda_2(z_1,\ z_2), \end{cases}$$

e di qui infine, per la (9):

$$(12)\ \begin{cases} \pm\sqrt{ad-bc}\,\lambda_1(\alpha z_1+\beta z_2,\ \gamma z_1+\delta z_2) \\ \qquad = a\lambda_1(z_1,\ z_2)+b\lambda_2(z_1,\ z_2). \end{cases}$$

Le (11), (12) dànno le due sostituzioni omogenee corrispondenti alla sostituzione non omogenea (9).

In particolare alle sostituzioni non omogenee $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ corrispondono le seguenti sostituzioni omogenee, che indicheremo colle stesse lettere:

$$\boldsymbol{S}\begin{cases} \pm i\lambda_1(z_1+z_2,\ z_2)=-\lambda_1(z_1,\ z_2)+\lambda_2(z_1,\ z_2), \\ \pm i\lambda_2(z_1+z_2,\ z_2)= \lambda_2(z_1,\ z_2), \end{cases}$$

$$\boldsymbol{T}\begin{cases} \pm i\lambda_1(\ -z_2,\ z_1)= \lambda_2(z_1,\ z_2), \\ \pm i\lambda_2(\ -z_2,\ z_1)= \lambda_1(z_1,\ z_2). \end{cases}$$

Per scrivere più brevemente queste formole, indichiamo rispettivamente con λ_i', λ_i'' le trasformate di λ_i mediante le sostituzioni $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$. Avremo:

$$\boldsymbol{S}\begin{cases} \pm i\lambda_1'=-\lambda_1+\lambda_2 \\ \pm i\lambda_2'=\lambda_2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{T}\begin{cases} \pm i\lambda_1''=\lambda_2 \\ \pm i\lambda_2''=\lambda_1. \end{cases}$$

È facile verificare che le $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ trasformano in sè stessa la forma $[\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)]^4$, sicchè questa è una forma modulare principale; e poichè tale è anche Δ, lo sarà pure il prodotto

$$3^6\Delta[\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)]^4.$$

Ma questo prodotto è di grado zero, quindi

esso è una funzione principale, cioè una funzione razionale di J. D'altra parte segue dall'ultima delle equazioni (8):

$$(13) \qquad 3^6 \Delta [\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)]^4 = h^2 \Delta^3,$$

sicchè $h^2 \Delta^3$ è una funzione modulare principale, cioè una funzione razionale di J, $\rho(J)$. Cerchiamo di determinare la forma di questa funzione.

A tal uopo osserviamo anzitutto che, se si rappresentano sopra un piano i valori della funzione $\lambda(z)$, e su questo piano si costruisce la superficie di RIEMANN di cui ogni foglio corrisponde ad un bitriangolo della rete di Γ_6, i punti di diramazione di questa superficie corrisponderanno ai nodi della rete considerata, e perciò solo in questi nodi sarà $\lambda'(z) = 0$. Ne segue che nei punti non appartenenti all'asse reale $\lambda'(z)$ non è mai nulla.

Inoltre, siccome il solo punto del triangolo fondamentale della rete modulare in cui $\lambda = \infty$ è il punto all'infinito, così per ogni valor finito di z contenuto in questo triangolo λ_1 e λ_2 avranno valor finito. Lo stesso può dirsi di Δ, come risulta dalla sua espressione. Pertanto il solo punto del triangolo fondamentale della rete modulare in cui la funzione (13) può divenire infinita è il punto all'infinito. Ora si ha, per $z = i\infty$, $\tau = 0$ (art. 129), e quindi le espressioni approssimate di g_2, g_3, Δ per $\lim z = i\infty$ sono (v. le formole dell'art. 129):

$$g_2 = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{z_2}\right)^4, \quad g_3 = \frac{1}{216}\left(\frac{\pi}{z_2}\right)^6, \quad \Delta = \left(\frac{\pi}{z_2}\right)^{12}\tau;$$

ne segue:

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{1}{12^3\,\tau}.$$

D'altra parte:

$$J = \frac{4}{27}\frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2},$$

donde la formola approssimata:

$$J = \tfrac{4}{27}\lambda^2,$$

ossia:

$$\lambda = \sqrt{\frac{27\,J}{4}} = \frac{1}{16\sqrt{\tau}}.$$

Derivando si ha di qui, tenuto conto che $\frac{d\tau}{dz} = 2\pi i\tau$:

$$\lambda' = -\frac{\pi i}{16\sqrt{\tau}},$$

quindi, per le (7):

$$\lambda_1 = \frac{i z_2}{2\pi\sqrt[4]{\tau}}, \quad \lambda_2 = \frac{8 i z_2}{\pi}\sqrt[4]{\tau},$$

donde:

$$\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) = -\frac{2 i z_2^3}{\pi^3\sqrt[4]{\tau}},$$

e infine:

$$\rho(J) = 3^6\Delta[\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)]^4 = 3^6 \cdot 2^4.$$

Dunque la funzione considerata non diviene infinita in alcun punto del triangolo fondamentale, quindi non lo diviene in alcun punto del piano, e però si riduce ad una costante, e precisamente a $3^6 . 2^4$. Pertanto si ha:

$$h = \frac{108}{\Delta^{\frac{3}{2}}},$$

e le (8) divengono:

$$(14) \quad \begin{cases} 2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_2^3 = \dfrac{54 g_3}{\Delta^{\frac{3}{4}}}, \\ \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \dfrac{3 g_2}{\Delta^{\frac{1}{2}}}, \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) = \dfrac{2}{\Delta^{\frac{1}{4}}}. \end{cases}$$

Poniamo:

$$\mu = -\frac{\lambda_2}{\sqrt[4]{\Delta}} = -\frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{8\chi_2^4}{\pi^2}\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda'^2};$$

osservando che λ' resta invariata per le stesse sostituzioni che lasciano invariata λ, si vede che $\frac{\mu}{\chi_2^4}$ è una funzione modulare relativa al sottogruppo Γ_6. D'altra parte σ_{01}^4 è una forma modulare di grado 4 relativa allo stesso gruppo, sicchè $\frac{\sigma_{01}^4}{\chi_2^4}$ è una funzione modulare. Ne segue che

anche $\theta = \frac{\sigma_{01}^4}{\mu}$ è una funzione modulare relativa al gruppo Γ_6. Di più tanto σ_{01} che μ restano invariate per la sostituzione S. Si ha infatti anzitutto dalla (1) dell'art. 138, facendo in essa $h=0$, $k=1$, $n=2$:

$$\sigma_{01} = -\frac{2z_2}{\pi}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{j\pi z_1}{z_2}}\right),$$

ed è facile vedere che, se si applica la sostituzione omogenea S:

$$z_1' = z_1 + z_2, \quad z_2' = z_2,$$

essa resta invariata. Quanto alla μ, si osservi che, se le z_1, z_2 subiscono la sostituzione S, la λ subisce la corrispondente sostituzione lineare $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sicchè:

$$\lambda(z+1) = -\lambda(z) + 1,$$

donde:

$$\lambda'(z+1) = -\lambda'(z);$$

ne segue:

$$\mu(z_1 + z_2, z_2) = \frac{8z_2^4}{\pi^2}\frac{\lambda(z+1)[\lambda(z+1)-1]}{\lambda'^2(z+1)}$$

$$= \frac{8z_2^4}{\pi^2}\frac{[-\lambda(z)+1][-\lambda(z)]}{[-\lambda'(z)]^2} = \mu(z_1, z_2).$$

Risulta di qui che la funzione θ è invariante per la sostituzione S. Se quindi consideriamo la parte di un campo fondamentale di Γ_6 compresa

tra due parallele all'asse y distanti tra loro di 1, in quest'area θ prenderà tutti i valori di cui è suscettibile. Prendiamo in particolare come campo fondamentale quello disegnato nella fig. 29, e come striscia quella compresa tra le rette di ascisse $\pm\frac{1}{2}$. In questo campo θ deve prendere il valore ∞, e poichè ciò che si dice per θ può ripetersi anche per $\frac{1}{\theta}$, anche $\frac{1}{\theta}$ deve divenire infinita, sicchè θ deve prendere anche il valore 0. Ora può dimostrarsi che in nessun punto del campo considerato diverso dai punti $z = 0$, $z = i\infty$ la θ può essere nulla nè infinita. La σ_{01}, come si vede dalla sua espressione, è sempre finita e diversa da zero per tutti i valori finiti e complessi di $\frac{z_1}{z_2}$; d'altra parte, poichè per z finita e diversa da zero tanto λ che λ_2 sono finite e diverse da zero, lo stesso può dirsi di μ, e con ciò è provato il nostro asserto. Ne segue che nel punto $z = i\infty$ la θ dev'essere o nulla o infinita.—Calcoliamo ora direttamente il valore approssimato di θ nel punto all'infinito. Poichè:

$$\lim_{z=i\infty} \operatorname{sen} z = i\infty,$$

si ha come espressione approssimata di σ_{01}:

$$\sigma_{01} = -\frac{2z_2}{\pi};$$

d'altra parte dalle espressioni approssimate di λ, λ'

segue:

$$\mu = -\frac{8 z_2^4}{\pi^4}.$$

Quindi:

$$\theta = \frac{\sigma_{01}^4}{\mu} = -2.$$

Ciò prova che θ è semplicemente una costante, sicchè si ha:

$$\sigma_{01}^4 = -2\mu.$$

Facciamo ora nella (6) dell'art. 136:
$h = 0$, $k = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$;
avremo:

$$\sigma_{10}(z_1, z_2) = \sigma_{01}(-z_2, z_1),$$

relazione la quale ci dice che la σ_{01} per opera della sostituzione T si trasforma nella σ_{10}. D'altra parte λ_2 per la T si trasforma in $\pm i\lambda_1$, λ_1 in $\pm i\lambda_2$, e quindi, per l'ultima delle (14), $\Delta^{\frac{1}{4}}$ si trasforma in $\mp i\Delta^{\frac{1}{4}}$. Ne segue che $\mu = -\frac{\lambda_2}{\Delta^{\frac{1}{4}}}$ si trasforma in $-\nu = +\frac{\lambda_1}{\Delta^{\frac{1}{4}}}$, sicchè si ha:

$$\frac{\sigma_{10}^4}{\nu} = 2.$$

Di qui e da ciò che prima si è trovato risulta:

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{10}^4},$$

ossia:

$$\lambda = -\frac{\sigma_{10}^4}{\sigma_{01}^4}.$$

Così siamo riusciti ad esprimere λ mediante forme modulari relative al sottogruppo omogeneo Γ_6.

Dall'espressione trovata risulta facilmente il significato geometrico della funzione λ.

Ricordiamo che, se ζ_i è uno dei semiperiodi $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 = -\zeta_1 - \zeta_2$, si ha:

$$p u - p \zeta_i = -\frac{\sigma(u + \zeta_i)\sigma(u - \zeta_i)}{\sigma^2 u \sigma^2 \zeta_i};$$

siccome poi:

$$\sigma(u - \zeta_i) = -e^{-2\eta_i u}\sigma(u + \zeta_i),$$

questa formula può scriversi:

$$p u - p \zeta_i = e^{-2\eta_i u}\frac{\sigma^2(u + \zeta_i)}{\sigma^2 u \sigma^2 \zeta_i}.$$

Diamo ad i successivamente i valori 1, 2 e facciamo $u = \zeta_3$; dividendo l'una per l'altra le due equazioni risultanti, e ponendo al solito $p\zeta_i = e_i$, avremo:

$$\frac{e_3 - e_2}{e_3 - e_1} = e^{2(\eta_1 - \eta_2)\zeta_3}\frac{\sigma^2 \zeta_1 \sigma^2(\zeta_2 + \zeta_3)}{\sigma^2 \zeta_2 \sigma^2(\zeta_1 + \zeta_3)}.$$

Ora la σu è funzione dispari, sicchè:

$$\sigma(\zeta_2 + \zeta_3) = \sigma(-\zeta_1) = -\sigma\zeta_1,$$
$$\sigma(\zeta_1 + \zeta_3) = \sigma(-\zeta_2) = -\sigma\zeta_2;$$

inoltre, per la (3) dell'art. 134:

$$(\eta_1 - \eta_2)\zeta_3 = (\eta_2 - \eta_1)(\zeta_1 + \zeta_2)$$
$$= \eta_2\zeta_2 - \eta_1\zeta_1 + \eta_2\zeta_1 - \eta_1\zeta_2 = \eta_2\zeta_2 - \eta_1\zeta_1 + \frac{\pi i}{2}.$$

Quindi la formola precedente diviene:

$$\frac{e_3 - e_2}{e_3 - e_1} = - e^{2(\eta_2 z_2 - \eta_1 z_1)} \frac{\sigma^4 z_1}{\sigma^4 z_2} .$$

D'altra parte segue dalla (7) dell'art. 134:

$$\sigma_{10} = - e^{-\frac{\eta_1 z_1}{2}} \sigma z_1 , \quad \sigma_{01} = - e^{-\frac{\eta_2 z_2}{2}} \sigma z_2 ,$$

quindi:

$$\lambda = - e^{2(\eta_2 z_2 - \eta_1 z_1)} \frac{\sigma^4 z_1}{\sigma^4 z_2} ,$$

e infine:

$$\lambda = \frac{e_3 - e_2}{e_3 - e_1} .$$

Rammentando che e_1, e_2, e_3, ∞ sono le 4 radici della forma biquadratica fondamentale delle funzioni ellittiche ridotta alla forma di WEIERSTRASS:

$$x_2 (x_1^3 - g_2 x_1 x_2^2 - g_3 x_2^3),$$

può dirsi che la funzione λ esprime il rapporto anarmonico dei punti aventi per ascisse queste 4 radici presi in un ordine opportuno. È chiaro poi:

a) Che i 6 valori di λ ci dànno i 6 valori del rapporto anarmonico dei 4 punti presi in tutte le disposizioni possibili (come del resto si vede dalle espressioni esplicite già trovate di questi 6 valori);

b) Che, per la proprietà invariantiva del rapporto anarmonico, λ esprime il rapporto anarmonico delle radici della forma biquadratica anche quando questa non sia ridotta alla forma di WEIERSTRASS.

Procedendo in modo simile, ma con calcoli

sempre più complicati, si potrebbero ottenere le espressioni per mezzo di z delle funzioni invarianti rispetto ai sottogruppi Γ_{12}, Γ_{24}, Γ_{60}, espressioni di cui possiamo affermare *a priori* l'esistenza, in virtù del teorema dell'art. 132.

Equazioni poliedriche e modulari *.

140. Se si eguaglia ad una costante una delle funzioni poliedriche o modulari, si ha un'*equazione poliedrica* o *modulare*. La risoluzione di una di tali equazioni ci dà i punti del piano in cui la corrispondente funzione prende un medesimo valore.

Le equazioni poliedriche e modulari possono tutte risolversi con un unico metodo, che si fonda sulla considerazione di un'equazione differenziale detta *equazione di* SCHWARZ.

Sia in generale $Z(z)$ una funzione uniforme di z che riprenda il proprio valore in tutti i punti

* Alla denominazione *equazione modulare* si dà nella teoria delle funzioni ellittiche un senso diverso; essa indica la relazione tra i moduli di due funzioni ellittiche legate da una trasformazione di grado superiore al primo. KLEIN distingue i due significati adoperando per l'uno *Modulgleichung*, per l'altro *Modulargleichung*. Per noi però non c'è pericolo di equivoco, giacchè delle equazioni modulari nel senso testè indicato non avremo occasione di occuparci.

omologhi di una rete regolare, i cui angoli sieno $\frac{\pi}{\nu_1}, \frac{\pi}{\nu_2}, \frac{\pi}{\nu_3}$.

La z può considerarsi come una funzione di Z che per ogni valore di Z prende più valori legati tra loro da sostituzioni lineari. Denotiamo momentaneamente con z, ζ due valori di z corrispondenti ad uno stesso valore di Z, sicchè:

$$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

ed indichiamo con apici le derivazioni rispetto a Z. La (1) può scriversi:

$$\gamma z \zeta + \delta \zeta - \alpha z - \beta = 0.$$

Derivando tre volte rispetto a Z si ottiene:

$$\gamma(z\zeta' + z'\zeta) + \delta\zeta' - \alpha z' = 0,$$

$$\gamma(z\zeta'' + 2z'\zeta' + z''\zeta) + \delta\zeta'' - \alpha z'' = 0,$$

$$\gamma(z\zeta''' + 3z'\zeta'' + 3z''\zeta' + z'''\zeta) + \delta\zeta''' - \alpha z''' = 0,$$

e di qui, eliminando α, γ, δ:

$$0 = \begin{vmatrix} z' & \zeta' & z\zeta' + z'\zeta \\ z'' & \zeta'' & z\zeta'' + 2z'\zeta' + z''\zeta \\ z''' & \zeta''' & z\zeta''' + 3z'\zeta'' + 3z''\zeta' + z'''\zeta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z' & \zeta' & 0 \\ z'' & \zeta'' & 2z'\zeta' \\ z''' & \zeta''' & 3(z'\zeta'' + z''\zeta') \end{vmatrix},$$

da cui sviluppando:

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2 = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2.$$

Noi porremo, θ essendo una funzione di Z:

$$\frac{\theta'''}{\theta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 = [\theta]_Z .$$

Allora l'ultima relazione trovata può scriversi:

$$(1) \qquad [\zeta]_Z = [z]_Z ;$$

essa ci dice che $[z]_Z$ è una funzione uniforme di Z.

Cerchiamo di determinare l'espressione di questa funzione.

Osservando che la (1) dell'art. 130 può scriversi:

$$z - z_0 = k(Z - Z_0) + k_1(Z - Z_0)^2 + k_2(Z - Z_0)^3 + \cdots,$$

si ha dalle (1)-(5) dell'art. stesso:

Per un punto z_0 che non sia un nodo:

$$z' \equiv k, \quad z'' \equiv 2k_1, \quad z''' \equiv 6k_2,$$

quindi:

$$[z]_Z \equiv \frac{6(k k_2 - k_1^2)}{k^2} .$$

Per un nodo a:

$$z' \equiv \frac{k}{\nu_1}(Z - 1)^{\frac{1}{\nu_1}-1}, \quad z'' \equiv \frac{k(1-\nu_1)}{\nu_1^2}(Z-1)^{\frac{1}{\nu_1}-2},$$

$$z''' \equiv \frac{k(1-\nu_1)(1-2\nu_1)}{\nu_1^3}(Z-1)^{\frac{1}{\nu_1}-3},$$

quindi:

$$(2) \qquad [z]_Z \equiv \frac{\nu_1^2 - 1}{2\nu_1^2}(Z-1)^{-2} .$$

Per un nodo b o c, con un eguale calcolo, rispettivamente:

$$(3) \qquad [z]_Z = \frac{\nu_2^2 - 1}{2\nu_2^2} Z^{-2},$$

$$(4) \qquad [z]_Z = \frac{\nu_3^2 - 1}{2\nu_3^2} Z^{-2}.$$

Nel caso che una delle ν, per es. ν_2, fosse infinita, posto:

$$\frac{k}{z-b} - l = \frac{-lz + (k+bl)}{z-b} = v,$$

si ha:

$$v = \log Z,$$

quindi:

$$v' = Z^{-1}, \quad v'' = -Z^{-2}, \quad v''' = 2Z^{-3},$$

e per conseguenza, tenuto conto della (1):

$$[z]_Z = [v]_Z = \tfrac{1}{2} Z^{-2},$$

che è la formola che si otterrebbe da quella trovata nel caso generale facendo in essa $\nu_2 = \infty$.

Dunque la $[z]_Z$ è una funzione uniforme di Z, che è nulla di 2° ordine per $Z = \infty$, e non ha altri punti singolari che due poli di 2° ordine nei punti 1, 0. Essa è dunque una funzione razionale di Z della forma seguente:

$$(5) \qquad [z]_Z = \frac{\rho + \sigma Z + \tau Z^2}{Z^2 (Z-1)^2} \;*,$$

---

* In virtù dei principii della teoria generale delle funzioni, la $[z]_Z$, essendo uniforme e avendo per sole singolarità dei poli, è razionale; inoltre i poli devono essere gli zeri del suo denominatore. Siccome poi essa è nulla di se-

dove ρ, σ, τ sono costanti da determinarsi. Dalle (2), (3), (4) segue:

$$\lim_{Z=1} [(Z-1)^2 [z]_Z] = \frac{\nu_1^2 - 1}{2\nu_1^2},$$

$$\lim_{Z=0} [Z^2 [z]_Z] = \frac{\nu_2^2 - 1}{2\nu_2^2},$$

$$\lim_{Z=\infty} [Z^2 [z]_Z] = \frac{\nu_3^2 - 1}{2\nu_3^2}.$$

Quindi si ha dalla (5):

$$\frac{\nu_1^2 - 1}{2\nu_1^2} = \rho + \sigma + \tau, \quad \frac{\nu_2^2 - 1}{2\nu_2^2} = \rho, \quad \frac{\nu_3^2 - 1}{2\nu_3^2} = \tau,$$

e di qui:

$$\sigma = \frac{\nu_1^2 - 1}{2\nu_1^2} - \frac{\nu_2^2 - 1}{2\nu_2^2} - \frac{\nu_3^3 - 1}{2\nu_3^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{\nu_3^2} - \frac{1}{\nu_1^2} - 1\right).$$

Dunque la funzione cercata è:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} [z]_Z = {} & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\nu_2^2}\right)\frac{1}{Z^2(Z-1)^2} \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{\nu_3^2} - \frac{1}{\nu_1^2} - 1\right)\frac{1}{Z(Z-1)^2} \\ & + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\nu_3^2}\right)\frac{1}{(Z-1)^2}. \end{aligned} \right.$$

---

condo ordine all'infinito, il grado del numeratore deve essere inferiore di due unità a quello del denominatore. Così si giunge alla formola (5).

Può scriversi anche:

$$(7)\quad \begin{cases} [z]_Z = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\nu_1^2}\right)\frac{1}{(Z-1)^2} \\ \qquad + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\nu_2^2}\right)\frac{1}{Z^2} \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_2^2}-\frac{1}{\nu_3^2}-1\right)\frac{1}{Z(Z-1)}. \end{cases}$$

L'equazione differenziale (6) o (7) dicesi *equazione di* SCHWARZ.

141. L'integrazione dell'equazione di SCHWARZ può ridursi a quella di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine.

Abbiasi l'equazione lineare:

$$(1)\qquad y'' + py' + qy = 0,$$

e sieno y_1, y_2 due suoi integrali indipendenti, sicchè:

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1'' + py_1' + qy_1 = 0, \\ y_2'' + py_2' + qy_2 = 0. \end{cases}$$

Da queste due relazioni segue:

$$(3)\qquad p = -\frac{y_1'' y_2 - y_1 y_2''}{y_1' y_2 - y_1 y_2'}.$$

Pongasi:

$$\frac{y_1}{y_2} = \eta;$$

sarà:

$$\eta' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2},$$

$$\frac{\eta''}{\eta'} = \frac{y_1'' y_2 - y_1 y_2''}{y_1' y_2 - y_1 y_2'} - 2\frac{y_2'}{y_2},$$

e per la (3):

$$\frac{\eta''}{\eta'} = -p - 2\frac{y_2'}{y_2} .$$

Derivando di nuovo, si ottiene:

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{\eta''^2}{\eta'^2} = -p' - 2\frac{y_2''}{y_2} + 2\frac{y_2'^2}{y_2^2} ,$$

quindi:

$$[\eta]_Z = -p' - 2\frac{y_2''}{y_2} + 2\frac{y_2'^2}{y_2^2} - \frac{1}{2}\left(-p - 2\frac{y_2'}{y_2}\right)^2$$

$$= -p' - \frac{1}{2}p^2 - 2\frac{y_2''}{y_2} - 2p\frac{y_2'}{y_2} ,$$

ossia, per la seconda delle (2):

$$[\eta]_Z = -p' - \tfrac{1}{2}p^2 + 2q = r.$$

Dunque il rapporto di due integrali d'un'equazione lineare omogenea del 2° ordine soddisfa ad un'equazione di Schwarz, che è pienamente determinata.

Se invece è data un'equazione di Schwarz:

$$[\eta]_Z = r, \tag{4}$$

posto:

$$r = -p' - \tfrac{1}{2}p^2 + 2q, \tag{5}$$

dove p, q sono due funzioni incognite, si prenda p ad arbitrio; q resterà pienamente determinata, e con essa l'equazione di 2° ordine (1) corrispondente alla data equazione (4).

Dall'integrale generale $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ della (1) si deduce subito l'integrale generale:

$$\eta = \frac{C_1 y_1 + C_2 y_2}{C_3 y_1 + C_4 y_2}$$

della (4). Supponiamo invece di conoscere l'integrale η della (4). Posto:

$$(6) \qquad y_1' y_2 - y_1 y_2' = y_2^2 \eta' = v,$$

si ha dalla (3):

$$v' + p v = 0,$$

e quindi integrando e designando con C una costante arbitraria:

$$(7) \qquad v = C e^{-\int p dZ}.$$

La (6) ci dà poi:

$$y_2 = \sqrt{\frac{C}{\eta'}} e^{-\frac{1}{2}\int p dZ},$$

e di qui segue infine:

$$y_1 = \eta \sqrt{\frac{C}{\eta'}} e^{-\frac{1}{2}\int p dZ}.$$

142. Il risultato ottenuto nell'art. prec., che cioè ad una data equazione (4) corrispondono infinite equazioni (1), era prevedibile; giacchè, data η, vi sono infinite coppie di funzioni y_1, y_2 il cui rapporto è eguale ad η. Se però fra queste infinite coppie ne sia individuata una, sarà pure individuata la corrispondente equazione del 2° ordine. È questo il caso nostro, giacchè le (1) dell'art. 128 determinano le z_1, z_2 come funzioni di Z (e di un'altra variabile X). Noi ci proponiamo di costruire l'equazione del 2° ordine di cui z_1, z_2 sono integrali.

Poniamo per semplicità:

$$F_i(z_1, z_2) = F_i, \quad F_i(z, 1) = \Phi_i,$$
$$\frac{d\Phi_i}{dz} = \Phi'_i, \quad \frac{n}{\nu_i} = k_i;$$

avremo, per le note proprietà delle funzioni omogenee:

$$F_i = z_2^{k_i}\Phi_i, \quad \frac{\partial F_i}{\partial z_1} = z_2^{k_i-1}\Phi'_i, \quad k_i F_i = z_1\frac{\partial F_i}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial F_i}{\partial z_2},$$

donde:

$$\Phi_i = \frac{1}{z_2^{k_i}} F_i = \frac{1}{k_i z_2^{k_i}}\left[z_1\frac{\partial F_i}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial F_i}{\partial z_2}\right],$$
$$\Phi'_i = \frac{1}{z_2^{k_i-1}}\frac{\partial F_i}{\partial z_1}.$$

Dopo ciò deriviamo la relazione:

$$Z = c\frac{F_2^{\nu_2}}{F_3^{\nu_3}} = c\frac{\Phi_2^{\nu_2}}{\Phi_3^{\nu_3}}$$

rispetto a Z; avremo:

$$1 = c\frac{\Phi_2^{\nu_2-1}}{\Phi_3^{\nu_3+1}}(\nu_2\Phi_3\Phi'_2 - \nu_3\Phi_2\Phi'_3)\frac{dz}{dZ}$$
$$= c\frac{\Phi_2^{\nu_2-1}}{\Phi_3^{\nu_3+1}}\frac{1}{z_2^{k_2+k_3-1}}\left[\frac{\nu_2}{k_3}\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\left(z_1\frac{\partial F_3}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial F_3}{\partial z_2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\nu_3}{k_2}\frac{\partial F_3}{\partial z_1}\left(z_1\frac{\partial F_2}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\right)\right]\frac{dz}{dZ}.$$

Ora:

$$\frac{\nu_2}{k_3} = \frac{\nu_3}{k_2},$$

inoltre, per il teorema d'Eulero sui poliedri (cfr.

art. 52):

$$k_1 + 2 = k_2 + k_3;$$

quindi, indicando con c una nuova costante:

$$1 = c \frac{\Phi_2^{\nu_2 - 1}}{\Phi_3^{\nu_3 + 1}} \frac{1}{z_2^{k_1}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial z_1} \frac{\partial F_3}{\partial z_2} - \frac{\partial F_3}{\partial z_1} \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \right) \frac{dz}{dZ}.$$

Rammentiamo che (art. 123) F_1 è, a meno d'un fattore costante, il determinante funzionale di F_2, F_3. Indicando pertanto con h, l due costanti, sarà:

$$1 = h \frac{\Phi_2^{\nu_2 - 1}}{\Phi_3^{\nu_3 + 1}} \frac{1}{z_2^{k_1}} F_1 \frac{dz}{dZ} = h \frac{\Phi_2^{\nu_2}}{\Phi_3^{\nu_3}} \frac{\Phi_1}{\Phi_2 \Phi_3} \frac{dz}{dZ}$$

$$= \frac{lZ}{X(z, 1)} \frac{dz}{dZ} = \frac{l z_2^2 Z}{X} \frac{dz}{dZ},$$

da cui:

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{X}{l z_2^2 Z}.$$

Ne segue (considerando come nell'art. 128 le z_1, z_2 come funzioni di Z e di X):

$$z_2 \frac{\partial z_1}{\partial Z} - z_1 \frac{\partial z_2}{\partial Z} = \frac{X}{lZ},$$

e quindi per la (7) dell'art. prec.:

$$\frac{X}{lZ} = C e^{-\int p\, dZ},$$

da cui:

$$\int p\, dZ = \log Z + \log \frac{Cl}{X},$$

e derivando rispetto a Z:

$$p = \frac{1}{Z}.$$

Conosciuta p, ed essendo data r dal secondo membro della (7) dell'art. 140, la (5) dell'art. prec. ci dà q. L'equazione cui soddisfanno z_1 e z_2 risulta pertanto essere la seguente:

$$y'' + \frac{1}{Z} y' + \frac{1}{4 Z^2 (Z-1)^2} \left[-\frac{1}{\nu_2^2} + \left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{\nu_3^2} - \frac{1}{\nu_1^2} + 1 \right) Z - \frac{1}{\nu_3^2} Z^2 \right] y = 0.$$

L'equazione trovata appartiene ad un tipo ben noto, quello delle *equazioni di* RIEMANN:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & P'' + \frac{1}{Z(1-Z)}(A + BZ)P' \\ & + \frac{1}{Z^2(1-Z)^2}(C + DZ + EZ^2)P = 0. \end{aligned} \right.$$

L'integrale della (1) si suole denotare con:

$$P \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma & Z \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{pmatrix},$$

dove le α, β, ... sono 6 costanti legate alle A, B, ... dalle relazioni:

$$A = 1 - \alpha - \alpha', \quad B = -1 - \beta - \beta', \quad C = \alpha\alpha',$$
$$D = -\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma', \quad E = \beta\beta',$$

e che inoltre soddisfanno alla condizione:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

Posto:

$$P = Z^\alpha (1-Z)^\gamma \varphi, \quad a = \beta + \gamma + \alpha,$$
$$b = \beta' + \gamma + \alpha, \quad c = 1 + \alpha - \alpha',$$

la (1) si trasforma nella:

$$(2) \quad Z(1-Z)\varphi'' + [c - (a+b+1)Z]\varphi' - ab\varphi = 0,$$

che è un'*equazione ipergeometrica* o *di* GAUSS. Ad essa soddisfa, come è facile verificare direttamente, la serie:

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi = F(a,\ b,\ c,\ Z) \\ = 1 + \frac{a.b}{1.c} Z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2\ c(c+1)} Z^2 \\ + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3.c(c+1)(c+2)} Z^3 + \cdots, \end{cases}$$

che dicesi *serie ipergeometrica.*

Se si pone:

$$\varphi = Z^{1-c}\psi,\ a' = a+1-c,\ b' = b+1-c,\ c' = 2-c,$$

la (2) si trasforma nella:

$$Z(1-Z)\psi'' + [c' - (a'+b'+1)Z]\psi' - a'b'\psi = 0,$$

che è dello stesso tipo della (2), e quindi ammette l'integrale:

$$\psi = F(a',\ b',\ c',\ Z).$$

Ne segue che la (2) ammette l'integrale:

$$(4)\qquad \varphi = Z^{1-c} F(a',\ b',\ c',\ Z).$$

Dagl'integrali (3), (4) della (2) risultano i seguenti due integrali della (1):

$$P = Z^{\alpha}(1 - Z)^{\gamma} F(a,\ b,\ c,\ Z),$$
$$P = Z^{\alpha+1-c}(1 - Z)^{\gamma} F(a',\ b',\ c',\ Z)$$
$$= Z^{\alpha'}(1 - Z)^{\gamma} F(a',\ b',\ c',\ Z).$$

143. Nel caso nostro [v. art. prec.], si ha:

$$A = 1,\ B = -1,\ C = -\frac{1}{4\nu_2^2},$$

$$D = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{\nu_3^2} - \frac{1}{\nu_1^2} + 1\right), \quad E = -\frac{1}{4\nu_3^2},$$

quindi:

$$\alpha + \alpha' = 0, \ \beta + \beta' = 0, \ \gamma + \gamma' = 1,$$

$$\alpha\alpha' = -\frac{1}{4\nu_2^2}, \ \beta\beta' = -\frac{1}{4\nu_3^2}, \ \gamma\gamma' = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\nu_1^2}\right),$$

donde segue:

$$\alpha = \frac{1}{2\nu_2}, \ \alpha' = -\frac{1}{2\nu_2}, \ \beta = \frac{1}{2\nu_3}, \ \beta' = -\frac{1}{2\nu_3},$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\nu_1}\right), \quad \gamma' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\nu_1}\right),$$

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3}\right),$$

$$b = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_3}\right), \quad c = 1 + \frac{1}{\nu_2},$$

$$a' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3}\right),$$

$$b' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_3}\right), \quad c' = 1 - \frac{1}{\nu_2}.$$

Pertanto i due integrali trovati sono:

$$(1) \quad \begin{cases} P = Z^{\frac{1}{2\nu_2}}(1 - Z)^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\nu_1}\right)} F(a, b, c, Z) \\ P = Z^{-\frac{1}{2\nu_2}}(1 - Z)^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\nu_1}\right)} F(a', b', c', Z), \end{cases}$$

dove le a, b, c, a', b', c' hanno i valori testè indicati. Mediante questi due integrali si potranno esprimere senza difficoltà i due integrali cercati z_1, z_2, e il rapporto di questi ci darà z in funzione

di Z, cioè ci darà la risoluzione dell'equazione poliedrica o modulare.

La cosa risulta particolarmente facile, se noi mutiamo l'orientazione dei poliedri in modo che il polo d'una faccia vada a cadere nel punto della sfera corrispondente al punto $z=0$ del piano. In questo caso per $z=0$ si ha $Z=0$, quindi (art. 130), indicando con k una costante:

$$z = k Z^{\frac{1}{\nu_2}} + \cdots;$$

d'altra parte, poichè la F_2 si annulla nei poli delle facce, essa deve contenere, ed una sola volta, il fattore z_1, mentre tale fattore non figura nè in F_1, nè in F_3, donde segue che nell'intorno dell'origine si ha:

$$X(z, 1) = hz + \cdots,$$

h designando una costante. Ne segue:

$$z_1 = z\frac{\sqrt{X}}{\sqrt{X(z, 1)}} = \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{h}} z^{\frac{1}{2}} + \cdots,$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{h}} z^{-\frac{1}{2}} + \cdots,$$

e quindi, indicando con λ_1, λ_2 due costanti:

$$z_1 = \lambda_1 Z^{\frac{1}{2\nu_2}} + \cdots, \quad z_2 = \lambda_2 Z^{-\frac{1}{2\nu_2}} + \cdots.$$

Nel caso considerato adunque i due integrali cercati non sono altro, a meno di fattori costanti, che gl'integrali (1).

144. Invece di esprimere direttamente le irra-

zionalità poliedriche e modulari * come serie ipergeometriche in Z, si può risolvere la sola equazione modulare col metodo testè esposto, e poi cercare di esprimere la irrazionalità diedrica per $m=3$, la tetraedrica, l'ottaedrica e l'icosaedrica come funzioni uniformi dell'irrazionalità modulare, ciò che, per il teorema dell'art. 131, è possibile. La costruzione effettiva di tali funzioni non è altro che la costruzione di funzioni invarianti rispetto ai sottogruppi Γ_6, Γ_{12}, Γ_{24}, Γ_{60} di Γ, problema già trattato nel cap. precedente.

Per l'irrazionalità modulare si ha:

$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 3, \quad \nu_3 = \infty,$$

quindi:

$$a = b = \tfrac{11}{12}, \quad c = \tfrac{4}{3}, \quad a' = b' = \tfrac{7}{12}, \quad c' = \tfrac{2}{3},$$

e le (1) dell'art. prec. ci dànno, a meno d'un fattore costante, che si determina senza difficoltà:

$$z = Z^{\frac{1}{3}} \frac{F\left(\frac{11}{12}, \frac{11}{12}, \frac{4}{3}, Z\right)}{F\left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, Z\right)}.$$

Ora noi abbiamo trovato (art. 139):

$$\lambda = -\frac{\sigma_{10}^4}{\sigma_{01}^4}.$$

Sostituendo nel 2° membro al posto di z la

---

* Diciamo per brevità *irrazionalità poliedrica* o *modulare* la z considerata come funzione della Z, essendo $Z = F(z)$ un'equazione poliedrica o modulare.

sua espressione testè costruita, avremo λ espressa in funzione di Z, avremo cioè la risoluzione dell'equazione diedrica per $m = 3$. Ed analogamente si otterrebbe la risoluzione delle altre equazioni poliedriche.

Studio algebrico delle equazioni poliedriche e dell'equazione modulare. Risolventi.

145. Non meno interessante della risoluzione delle equazioni poliedriche per via trascendente è il loro studio dal punto di vista dell'Algebra.

Prima di intraprendere tale studio, sarà utile richiamare alcune nozioni di cui dovremo far uso nelle pagine seguenti *).

Se si ha una funzione razionale f di più variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, si dice *gruppo appartenente alla funzione* f il gruppo delle permutazioni ** delle variabili che lasciano inalterata quella funzione; e si dice pure che la funzione *appartiene* al gruppo.

Se f è funzione simmetrica, il gruppo ad essa

---

*) Per maggiori schiarimenti si può consultare, per es., l'eccellente *Teoria dei gruppi di sostituzioni e dell'equazioni algebriche secondo Galois* di L. BIANCHI (Pisa 1899).

** Che tali permutazioni formano un gruppo, è cosa evidente; infatti, se due di esse lasciano inalterata la f, la stessa proprietà appartiene al loro prodotto.

appartenente consta di tutte le $n!$ permutazioni delle variabili; esso dicesi il gruppo *simmetrico.*

Se f per tutte le permutazioni delle variabili prende soltanto due valori diversi (tale sarebbe per es. il determinante di VANDERMONDE, che per una permutazione qualunque delle variabili o resta inalterato o muta di segno), il suo gruppo è costituito dalle $\frac{1}{2}n!$ permutazioni pari; esso dicesi il gruppo *alterno.*

Ogni funzione appartenente al gruppo alterno ha la forma:

$$\varphi + \psi\sqrt{\Delta},$$

dove φ e ψ sono funzioni simmetriche, e Δ è il discriminante delle n variabili, cioè il prodotto dei quadrati delle loro $\binom{n}{2}$ differenze. Le due forme che essa assume per tutte le permutazioni delle variabili sono:

$$\varphi + \psi\sqrt{\Delta}, \quad \varphi - \psi\sqrt{\Delta}.$$

Se le forme diverse che assume f per le varie permutazioni delle variabili sono:

$$f, \ f_1, f_2, \ldots, f_{s-1},$$

il numero s è il quoziente di $n!$ per l'ordine del gruppo, cioè l'indice del gruppo della funzione considerato come sottogruppo del gruppo simmetrico. I gruppi delle funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_{s-1}$ sono altrettanti sottogruppi del gruppo simmetrico

equivalenti al gruppo di f e non necessariamente diversi.

Se G, H sono i gruppi delle funzioni f, φ, e se H è sottogruppo di G, f può esprimersi razionalmente mediante φ e funzioni simmetriche, e reciprocamente.

In particolare, se due funzioni f, φ hanno lo stesso gruppo, ciascuna di esse può esprimersi razionalmente mediante l'altra e funzioni simmetriche.

Data un'equazione algebrica, i suoi coefficienti ci dànno i valori delle funzioni simmetriche delle sue radici. Può avvenire però che sia anche assegnato, o comunque noto, il valore di qualche funzione non simmetrica delle radici. Se G è il gruppo a cui appartiene questa funzione φ, sarà noto al tempo stesso il valore di qualunque altra funzione appartenente al gruppo G, giacchè una tale funzione è esprimibile razionalmente, come risulta da ciò che si disse poc'anzi, mediante φ e i coefficienti dell'equazione.

Se fossero noti i valori di più funzioni φ, ψ, χ, ... appartenenti a gruppi diversi G, H, K, ..., sarebbe pure noto il valore della funzione:

$$\alpha\varphi + \beta\psi + \gamma\chi + \cdots,$$

dove α, β, γ, ... rappresentano numeri qualunque diversi tra loro, o meglio quantità indeterminate. Ora il gruppo di questa funzione è il massimo sottogruppo comune ai gruppi G, H, K, ...,

giacchè la condizione necessaria e sufficiente perchè essa resti invariata è che resti invariata ciascuna delle funzioni φ, ψ, χ, ... Di qui si vede che possiamo sempre ridurci al caso in cui sia noto il valore di *una* funzione (e con essa naturalmente quelli di tutte le altre funzioni appartenenti allo stesso gruppo). Il gruppo a cui appartiene questa funzione dicesi *gruppo dell'equazione.*

Se un'equazione è *generale,* cioè se le sole funzioni razionali delle radici di cui sieno noti i valori sono le funzioni simmetriche, il suo gruppo è il gruppo simmetrico.

Se invece è noto per es. il valore della radice del discriminante, il gruppo dell'equazione è il gruppo alterno.

Se un'equazione è irriducibile, il suo gruppo è transitivo (art. 15), e reciprocamente.

Sia $f(z) = 0$ un'equazione di grado n, i cui coefficienti appartengano ad un certo campo di razionalità * C, y una funzione razionale delle sue radici z, z_1, z_2, ..., z_{n-1} con coefficienti appartenenti al campo C. Se per effetto delle r permutazioni delle radici, r denotando l'ordine del grup-

---

* Dicesi *campo di razionalità* $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ l'insieme delle funzioni razionali di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Così per es. il campo di razionalità $[1]$ è costituito dall'insieme di tutti i numeri razionali.

po G dell'equazione, la y prende s valori diversi:

$$y, \quad y_1, \quad y_2, \ldots, y_{s-1},$$

le funzioni simmetriche di questi s valori saranno funzioni simmetriche delle radici dell'equazione data a coefficienti appartenenti a C, e quindi apparterranno esse stesse a C; cioè le $y, y_1, \ldots, y_{s-1}$ saranno radici d'un'equazione di grado s i cui coefficienti apparterranno al campo C. Questa equazione:

$$\varphi(y) = 0 \tag{1}$$

dicesi una *risolvente* della data. Tra il gruppo G dell'equazione proposta e quello H della risolvente ha luogo l'isomorfismo *), che può essere oloedrico o meriedrico; e possiamo osservare (cfr. art. 16) che soltanto il primo caso può aver luogo se G è un gruppo semplice.

Nel primo caso ad ogni permutazione delle z diversa dall'identità corrisponde una permutazione delle y diversa dall'identità, e viceversa; cioè le y non restano tutte invariate se non per la sola permutazione identica delle z. Ne segue che il gruppo della funzione:

$$\eta = \alpha y + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{s-1} y_{s-1}, \tag{2}$$

dove le α sono costanti tutte diverse, è costituito

---

*) Infatti a ciascuna permutazione delle z corrisponde una determinata permutazione delle y, e i prodotti di permutazioni corrispondenti sono corrispondenti.

dalla sola identità, e quindi che le z sono esprimibili razionalmente mediante η e quantità del campo C, per modo che l'equazione proposta può considerarsi come una risolvente della (1). Si dice allora che la (1) è una *risolvente equivalente,* giacchè la risoluzione dell'equazione $f(z) = 0$ e quella dell'equazione $\varphi(y) = 0$ sono problemi equivalenti.

Nel secondo caso all'identità del gruppo H corrisponde nel gruppo G un sottogruppo invariante G'; esso è l'insieme delle permutazioni delle z che lasciano invariata la funzione (2). Supposto pertanto di saper risolvere la (1), e quindi di conoscere il valore della funzione η, il gruppo della equazione data cessa di essere G e si riduce invece a G' *. Dunque una risolvente non equivalente ha la proprietà, che la sua risoluzione riduce il gruppo dell'equazione ad un sottogruppo invariante del gruppo stesso.

Una risolvente equivalente che ha particolare importanza è la *risolvente di* Galois. Si definisce come tale l'equazione irriducibile di cui una radice è:

$$\rho = \beta z + \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_{n-1} z_{n-1},$$

$\beta, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ essendo costanti tutte diverse fra loro. Poichè ogni permutazione delle z altera il

* G' è il sottogruppo comune al gruppo a cui appartiene la funzione y e ai suoi equivalenti.

valore della ρ, il gruppo della funzione ρ è costituito dalla sola identità, e però mediante la ρ possono esprimersi razionalmente tutte le z. Inoltre, poichè tutte le radici della risolvente di GALOIS si ottengono dalla ρ scambiando le z fra loro, esse sono tutte funzioni appartenenti al gruppo costituito dalla sola identità, e quindi possono tutte esprimersi razionalmente mediante una qualunque di esse.

Diciamo $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_{r-1}$ queste radici, e scriviamo:

$$\rho_i = \psi_i(\rho) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1),$$

le ψ_i essendo simboli di funzioni razionali. Ogni funzione ψ_i corrisponde ad una determinata permutazione S_i del gruppo G, cioè a quella che cambia ρ in ρ_i; e il prodotto di due permutazioni S_i, S_h ha per corrispondente la funzione $\psi_i \psi_k$. Quindi le ψ_i, considerate come simboli di operazioni, costituiscono un gruppo Γ oloedricamente isomorfo al gruppo G.

Sia:

$$(3) \qquad F(u) = 0$$

la risolvente di GALOIS, ed applichiamo ad essa il cambiamento di variabile:

$$v = \psi_h(u);$$

essa diviene:

$$(4) \qquad F[\psi_h^{-1}(v)] = \Phi(v) = 0.$$

Le radici della (3) sono:

$$u=\rho,\quad u=\psi_1(\rho),\ \ldots,\ u=\psi_{r-1}(\rho);$$

quelle della (4) sono le espressioni di v che si ricavano dalle:

$$\psi_h^{-1}(v)=\rho,\ \psi_h^{-1}(v)=\psi_1(\rho),\ \ldots,\ \psi_h^{-1}(v)=\psi_{r-1}(\rho),$$

cioè:

$$(5)\quad v=\psi_h(\rho),\quad v=\psi_1\psi_h(\rho),\ \ldots,\ v=\psi_{r-1}\psi_h(\rho).$$

Ma, poichè le operazioni ψ formano un gruppo, le operazioni (5) non sono altro che le ψ, ψ_1, ..., ψ_{r-1}, salvo l'ordine. Dunque le equazioni (3), (4) hanno le stesse radici; cioè ciascuna delle funzioni ψ trasforma la risolvente di GALOIS in sè stessa. Questa risolvente ha dunque la proprietà di ammettere un numero di trasformazioni razionali in sè stessa pari al suo grado.

Reciprocamente, se un'equazione irriducibile di grado r:

$$F(u)=0$$

ammette r trasformazioni razionali in sè stessa:

$$v=u,\quad v=\psi_1(u),\quad v=\psi_2(u),\ \ldots,\ v=\psi_{r-1}(u)$$

si ha, indicando con h uno qualunque dei numeri 1, 2, ..., $r-1$:

$$F(u)=F[\psi_h^{-1}(u)]\ *,$$

e quindi, se ρ è una radice dell'equazione data, è pure radice della stessa la u risultante dalla:

$$\psi_h^{-1}(u)=\rho,$$

* I due membri potrebbero anche differire per un fattore costante, ciò che per noi non ha alcuna importanza.

cioè la $u = \psi_h(\rho)$. Dunque le radici dell'equazione sono tutte funzioni razionali di una di esse, e l'equazione può considerarsi come la risolvente di GALOIS di sè stessa; inoltre il gruppo formato dalle operazioni ψ è oloedricamente isomorfo al gruppo dell'equazione, e quindi può assumersi senz'altro come il gruppo dell'equazione.

146. Cerchiamo di applicare le cose esposte alle equazioni poliedriche.

Sia:

$$Z(z) = Z$$

un'equazione poliedrica (o ciclica), G il gruppo corrispondente, il cui grado si denoti con n. Se si applicano all'equazione le n sostituzioni lineari di G, essa rimane evidentemente invariata, sicchè G può considerarsi come il suo gruppo; inoltre G è transitivo, perchè, presi due punti omologhi qualunque, esiste sempre in G una sostituzione che muta l'uno di essi nell'altro, e quindi l'equazione è irriducibile. Dunque:

Ogni equazione poliedrica è irriducibile, ha per gruppo il corrispondente gruppo poliedrico, e può considerarsi come la risolvente di GALOIS *di sè stessa.*

147. *a*) Le equazioni cicliche appartengono al dominio dell'Algebra elementare.

Infatti l'equazione:

$$z^n = Z \tag{1}$$

si risolve mediante una semplice estrazione di ra-

dice:

$$z = \sqrt[n]{Z}.$$

b) Anche le equazioni diedriche:

$$(2) \qquad \frac{(z^m + 1)^2}{4 z^m} = Z$$

sono di natura elementare; esse appartengono alla classe delle equazioni riducibili alle equazioni di 2° ordine. Noi però possiamo applicare anche a queste equazioni i concetti generali poc'anzi esposti.

Poichè il gruppo diedrico d'ordine $n = 2m$ contiene un sottogruppo ciclico invariante d'ordine m, noi prenderemo come risolvente (non equivalente) della (2) un'equazione avente per radice una funzione appartenente a questo sottogruppo, per es. la funzione $z^m = Z_1$. Una tale equazione si ottiene immediatamente dalla (2); essa è:

$$\frac{(Z_1 + 1)^2}{4 Z_1} = Z,$$

e si riduce per via elementare all'equazione ciclica di 2° ordine:

$$[Z_1 - 2Z + 1]^2 = 4Z(Z - 1),$$

che ci dà:

$$Z_1 = 2Z - 1 + 2\sqrt{Z(Z-1)}.$$

Si ha quindi:

$$z = \sqrt[m]{2Z - 1 + 2\sqrt{Z(Z-1)}}.$$

In particolare pel gruppo trirettangolo ($m=2$)

si ha:

$$(3)\ z=\sqrt{2Z-1+2\sqrt{Z(Z-1)}}=\sqrt{Z}+\sqrt{Z-1}.$$

c) Il gruppo tetraedrico contiene come sottogruppo invariante un gruppo trirettangolo. Ora l'equazione tetraedrica:

$$\frac{\varphi^3}{\psi^3}=\left(\frac{z^4+2i\sqrt{3}\,z^2+1}{z^4-2i\sqrt{3}\,z^2+1}\right)^3=Z$$

può scriversi, posto $\alpha=e^{\frac{2\pi i}{3}}$:

$$\left[\frac{(z^2+1)^2+4\alpha z^2}{(z^2+1)^2+4\alpha^2 z^2}\right]^3=Z,$$

od anche:

$$(4)\qquad \left[\frac{\dfrac{(z^2+1)^2}{4z^2}+\alpha}{\dfrac{(z^2+1)^2}{4z^2}+\alpha^2}\right]^3=Z.$$

Prendiamo come risolvente un'equazione avente per radice una funzione invariante per il gruppo trirettangolo, per es. la funzione:

$$\frac{(z^2+1)^2}{4z^2}=Z_1.$$

L'equazione cercata risulta subito dalla (4); essa è:

$$\left(\frac{Z_1+\alpha}{Z_1+\alpha^2}\right)^3=Z.$$

Come si vede, questa è un'equazione ciclica; ne risulta:

$$(5) \qquad Z_1 = -\frac{\alpha^2 \sqrt[3]{Z} - \alpha}{\sqrt[3]{Z} - 1},$$

quindi, tenuto conto della (3):

$$(6) \qquad z = \sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_1 - 1},$$

dove la Z_1 è data dalla (5).

d) Il gruppo ottaedrico contiene come sotto-gruppo invariante un gruppo tetraedrico.

Ora l'equazione ottaedrica:

$$\frac{W^3}{108\,t^4} = Z,$$

in virtù delle relazioni (art. 125, 126):

$$W = \varphi\psi, \quad 12\,i\sqrt{3}\,t^2 - \varphi^3 + \psi^3 = 0,$$

può scriversi:

$$(7) \qquad \frac{-4\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^3}{\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^3 - 1\right]^2} = Z.$$

Prendiamo come risolvente un'equazione di cui una radice sia una funzione invariante pel gruppo tetraedrico, per es. la funzione:

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^3 = Z_2.$$

Una tale equazione risulta subito dalla (7); essa è:

$$\frac{-4\,Z_2}{(Z_2 - 1)^2} = Z,$$

e si riduce immediatamente ad una equazione ciclica, che risolta ci dà:

$$(8) \qquad Z_2 = \frac{Z - 2 + 2\sqrt{1 - Z}}{Z}.$$

Si ha dunque, per la (6):

$$z = \sqrt{Z_3} + \sqrt{Z_3 - 1},$$

dove [cfr. eq. (5)]:

$$Z_3 = -\frac{\alpha^2 \sqrt[3]{Z_2} - \alpha}{\sqrt[3]{Z_2} - 1},$$

e Z_2 è definita dalla (8).

148. Nulla di simile a quanto si è fatto per i precedenti gruppi può ripetersi per il gruppo icosaedrico; giacchè, essendo esso semplice, non può dar luogo a risolventi non equivalenti. Noi cercheremo invece di costruire una risolvente equivalente che ha per noi speciale interesse.

Il gruppo icosaedrico contiene 5 sottogruppi tetraedrici equivalenti. Ora, se noi costruiremo una funzione che resti invariata per le sostituzioni di uno di questi gruppi, essa, per le sostituzioni del gruppo icosaedrico, prenderà 5 valori diversi, e però sarà radice d'un'equazione di 5° grado, che sarà una risolvente dell'equazione icosaedrica. La sua espressione per la z sarà poi una funzione razionale di 12° grado.

Scegliamo, per fissare le idee, il sottogruppo

. tetraedrico corrispondente alla terna di mediane ortogonali di cui un estremo è il punto di mezzo dello spigolo 1-2, terna che abbiamo denotato (art. 67) con k_1. Se indichiamo con t' la forma di 6° grado che si annulla negli estremi di questa terna, una funzione di 12° grado invariante rispetto al sottogruppo tetraedrico considerato sarà:

$$r = \frac{t'^2}{f}. \tag{1}$$

La forma t' è quella che abbiamo indicato già con t, riferita però ad una posizione diversa del tetraedro. Essa quindi si ottiene da t mediante quella sostituzione lineare che rappresenta la rotazione per la quale i tre assi coordinati ortogonali si trasformano nelle tre mediane costituenti la terna considerata.

Questa rotazione, come è facile osservare, ha l'ampiezza $-\frac{l}{2}$, ed il suo asse è l'asse η. Nelle formole (6) dell'art. 61 deve porsi quindi:

$$\rho = -\frac{l}{4}, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 90;$$

esse ci dànno allora:

$$a = c = 0, \quad b = -\operatorname{sen}\frac{l}{4}, \quad d = \cos\frac{l}{4},$$

sicchè la (3) dello stesso articolo diviene:

$$z' = \frac{z \cos \frac{l}{4} + \operatorname{sen} \frac{l}{4}}{-z \operatorname{sen} \frac{l}{4} + \cos \frac{l}{4}},$$

ossia sotto forma omogenea unitaria:

$$z'_1 = z_1 \cos \frac{l}{4} + z_2 \operatorname{sen} \frac{l}{4}, \quad z'_2 = -z_1 \operatorname{sen} \frac{l}{4} + z_2 \cos \frac{l}{4}.$$

Si ha pertanto:

$$t' = z'_1 z'_2 (z'^4_1 - z'^4_2)$$

$$= \left[-(z_1^2 - z_2^2) \cos \frac{l}{4} \operatorname{sen} \frac{l}{4} + z_1 z_2 \left(\cos^2 \frac{l}{4} - \operatorname{sen}^2 \frac{l}{4} \right) \right] \times$$

$$\times \left[(z_1^4 - z_2^4) \left(\cos^2 \frac{l}{4} - \operatorname{sen}^2 \frac{l}{4} \right) + 4 z_1 z_2 (z_1^2 + z_2^2) \operatorname{sen} \frac{l}{4} \cos \frac{l}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-(z_1^2 - z_2^2) \operatorname{sen} \frac{l}{2} + 2 z_1 z_2 \cos \frac{l}{2} \right] \times$$

$$\times \left[(z_1^2 - z_2^2) \cos \frac{l}{2} + 2 z_1 z_2 \operatorname{sen} \frac{l}{2} \right] [z_1^2 + z_2^2]$$

$$= \tfrac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2) \left[-\tfrac{1}{2} (z_1^4 + z_2^4 - 6 z_1^2 z_2^2) \operatorname{sen} l + 2 z_1 z_2 (z_1^2 - z_2^2) \cos l \right];$$

ora (art. 65):

$$\operatorname{sen} l = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \cos l = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

quindi:

$$t' = -\frac{1}{2\sqrt{5}} (z_1^2 + z_2^2)(z_1^4 - 2 z_1^3 z_2 - 6 z_1^2 z_2^2 + 2 z_1 z_2^3 + z_2^4),$$

ossia, sopprimendo il fattore $-\frac{1}{2\sqrt{5}}$:

$$t' = z_1^6 - 2 z_1^5 z_2 - 5 z_1^4 z_2^2 - 5 z_1^2 z_2^4 + 2 z_1 z_2^5 + z_2^6 .$$

La nostra funzione è dunque:

$$r = \frac{(z_1^6 - 2 z_1^5 z_2 - 5 z_1^4 z_2^2 - 5 z_1^2 z_2^4 + 2 z_1 z_2^5 + z_2^6)^2}{z_1 z_2 (z_1^{10} - 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})},$$

od anche:

$$r = \frac{(z^6 - 2 z^5 - 5 z^4 - 5 z^2 + 2 z + 1)^2}{z (z^{10} - 11 z^5 - 1)} .$$

L'equazione di 5° grado tra r e Z può scriversi:

$$(2) \qquad Z - 1 : Z : 1 = \varphi(r) : \psi(r) : \chi(r);$$

$\varphi(r), \psi(r), \chi(r)$ sono 3 polinomi uno dei quali almeno è di 5° grado e nessuno di grado superiore al 5°, e le cui radici ci dànno i valori che prende la r rispettivamente nei punti di mezzo degli spigoli, nei centri delle facce e nei vertici dell'icosaedro. Essi sono poi legati dall'identità:

$$(3) \qquad \varphi(r) = \psi(r) - \chi(r).$$

Anzitutto la (1) ci mostra che la r è infinita in tutti i vertici; quindi le radici della $\chi(r)$ devono esser tutte infinite, e però $\chi(r)$ deve ridursi ad una costante. Noi porremo;

$$(4) \qquad \chi(r) = 1728.$$

Dalla (1) segue inoltre che la r si annulla in 6 dei 30 punti di mezzo degli spigoli. Negli altri 24 essa deve prendere altri 4 valori. Ma poichè le sostituzioni del gruppo tetraedrico, mentre mutano r

in sè stessa e lasciano invariata la terna k_1, non lasciano invariata nessun'altra terna, il valore che r prende negli estremi di una delle 4 terne k_2, k_3, k_4, k_5 dovrà essere eguale a quello che essa prende negli estremi d'un'altra terna. In altre parole, i quattro valori dovranno due a due essere eguali. Quindi $\varphi(r)$ avrà la forma seguente:

(5) $$\varphi(r) = \mu r (r^2 + \alpha r + \beta)^2.$$

Quanto ai 20 centri delle facce dell'icosaedro, 8 di essi coincidono (art. 75) coi centri delle facce dell'ottaedro i cui vertici sono gli estremi della terna k_1, ossia costituiscono i vertici del cubo polare. Questi vertici per le rotazioni del gruppo tetraedrico si scambiano fra loro 4 a 4 (giacchè formano due tetraedri reciprocamente polari di cui ognuno si muta in sè stesso); gli altri 12 punti, non potendo contenere alcuna quaterna che resti invariata, si scambiano tutti fra loro. Pertanto, siccome i centri delle facce devono considerarsi come punti tripli, $\psi(r)$ avrà due radici semplici ed una radice tripla, cioè sarà:

(6) $$\psi(r) = \nu (r + \gamma)^3 (r^2 + \delta r + \varepsilon).$$

I coefficienti delle (5), (6) si determinano mediante le (2), (3), (4). In virtù di queste relazioni si ha:

(7) $$\mu r (r^2 + \alpha r + \beta)^2 = \nu (r + \gamma)^3 (r^2 + \delta r + \varepsilon) - 1728,$$

$$Z = \frac{\nu (r + \gamma)^3 (r^2 + \delta r + \varepsilon)}{1728}.$$

Ricordiamo d'altra parte che (art. 128):

$$Z = -\frac{H^3}{1728 f^5}.$$

Per $z = \infty$ risulta di qui e dall'espressione di r:

$$r = z, \quad Z = \frac{\nu r^5}{1728} = \frac{\nu z^5}{1728}, \quad Z = \frac{z^5}{1728};$$

quindi $\nu = 1$; inoltre dal confronto dei termini di grado massimo della (7) segue $\mu = \nu$, sicchè $\mu = \nu = 1$, e quindi:

$$\varphi(r) = r(r^2 + \alpha r + \beta)^2, \quad \psi(r) = (r + \gamma)^3 (r^2 + \delta r + \varepsilon).$$

La (7) diviene dunque:

$$(8) \quad r(r^2 + \alpha r + \beta)^2 = (r + \gamma)^3 (r^2 + \delta r + \varepsilon) - 1728.$$

Deriviamo ambi i membri di questa identità; avremo:

$$(r^2 + \alpha r + \beta)^2 + 2r(r^2 + \alpha r + \beta)(2r + \alpha)$$
$$= 3(r + \gamma)^2 (r^2 + \delta r + \varepsilon) + (r + \gamma)^3 (2r + \delta),$$

ossia:

$$(r^2 + \alpha r + \beta)(5r^2 + 3\alpha r + \beta)$$
$$= (r + \gamma)^2 [5r^2 + (2\gamma + 4\delta) r + (\gamma\delta + 3\varepsilon)].$$

Il fattore $r + \gamma$ non può dividere il trinomio $r^2 + \alpha r + \beta$, giacchè i valori che r prende nei centri delle facce sono necessariamente diversi da quelli che prende nei punti di mezzo degli spigoli. Dev'essere quindi:

$$5r^2 + 3\alpha r + \beta = 5(r + \gamma)^2,$$
$$5r^2 + (2\gamma + 4\delta) r + (\gamma\delta + 3\varepsilon) = 5(r^2 + \alpha r + \beta),$$

donde:

$$3\alpha = 10\gamma, \quad \beta = 5\gamma^2, \quad 2\gamma + 4\delta = 5\alpha, \quad \gamma\delta + 3\varepsilon = 5\beta,$$

che ci dànno:

(9) $\alpha = \frac{10}{3}\gamma$, $\beta = 5\gamma^2$, $\delta = \frac{11}{3}\gamma$, $\varepsilon = \frac{64}{9}\gamma^2$.

Risulta inoltre dalla (8):

$$\gamma^3 \varepsilon = 1728,$$

che, per l'ultima delle (9), diviene:

$$(10) \qquad \gamma^5 = \frac{9}{64} 1728 = 3^5.$$

Per determinare completamente γ, conviene fare un'osservazione. Il valore $-\gamma$ è quello che prende r nei centri delle facce dell'icosaedro che non sono centri delle facce dell'ottaedro determinato dalla terna k_1. Ora uno di questi centri è certamente quello della faccia 2.9.10 dell'icosaedro; esso non può essere centro di una faccia dell'ottaedro, perchè appunto sopra un suo lato (il lato 9.10) sta un vertice dell'ottaedro stesso. Ora il centro della faccia 2.9.10 sta evidentemente (v. fig. 13, 14) sull'asse reale, e d'altra parte risulta dall'espressione di r che r è sempre reale per valori reali di z; quindi il valore $-\gamma$ che prende r nel centro considerato, e perciò anche in tutti gli altri che non sono centri di facce dell'ottaedro, è necessariamente reale, e la (10) ci dà l'unica soluzione $\gamma = 3$. Dopo ciò si ha, in virtù delle (9):

$$\alpha = 10, \quad \beta = 45, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 11, \quad \varepsilon = 64,$$

e la risolvente di 5° grado cercata può scriversi:

$$Z-1 : Z : 1$$
$$= r(r^2+10r+45)^2 : (r+3)^3(r^2+11r+64) : 1728,$$

od anche, tenuto conto delle formole dell'art. 127:

$$\frac{T^2}{f^5} = 1728(Z - 1) = r(r^2 + 10r + 45)^2.$$

Poniamo per r la sua espressione (1), scrivendo per semplicità t invece di t'; avremo:

$$T^2 = t^2(t^4 + 10ft^2 + 45f^2)^2,$$

ed estraendo la radice, e considerando che per $z_1 = 1$, $z_2 = 0$ si ha $T = 1$, $t = 1$:

$$(11) \qquad t(t^4 + 10ft^2 + 45f^2) - T = 0,$$

che, sebbene sia sotto forma omogenea, chiameremo pure risolvente.

149. Prima di passare alla costruzione di un'altra risolvente più importante della equazione dell'icosaedro, detta la *risolvente principale*, dobbiamo trovare l'espressione della forma W relativa all'ottaedro da noi considerato, forma che indicheremo con W'. Abbiamo:

$$W' = z_1'^8 + 14z_1'^4 z_2'^4 + z_2'^8,$$

dove le z_1', z_2' sono quelle stesse che figurano nella sostituzione considerata nell'art. prec. Invece di fare direttamente la sostituzione, noi ci varremo della circostanza che W è l'hessiano di t, e che l'hessiano è una forma covariante. Basterà pertanto formare l'hessiano di t'; esso (a meno di un fattore costante) sarà W'. Si trova quindi, scrivendo W invece di W', e tenendo conto che, per l'indeterminatezza dei coefficienti a, b che fra poco introdurremo, un fattore costante comune a tutti i ter-

mini di W non ha alcuna importanza:

$$W = -z_1^8 - z_1^7 z_2 - 7 z_1^6 z_2^2 + 7 z_1^5 z_2^3$$
$$- 7 z_1^3 z_2^5 - 7 z_1^2 z_2^6 + z_1 z_2^7 - z_2^8.$$

Ciò premesso, osserviamo che la forma:

$$Y = a W + b t W,$$

dove a, b sono quantità qualunque, essendo una funzione a 5 valori, deve soddisfare ad un'equazione di 5° grado:

$$(1) \quad Y^5 + A Y^4 + B Y^3 + C Y^2 + D Y + E = 0;$$

le A, B, C, D, E sono funzioni omogenee di 1°, 2°, 3°, 4°, 5° grado in a, b, contenenti z_1, z_2. Indichiamo con t_h, W_h ($h = 1, 2, 3, 4$) le espressioni di t, W relative alla terna di mediane k_{h+1}; le t_h, W_h si ottengono dalle t, W mediante la sostituzione S^h, sicchè, ricordando che l'espressione della sostituzione omogenea S^h è:

$$z_1' = \varepsilon^{3h} z_1, \quad z_2' = \varepsilon^{2h} z_2,$$

si ha:

$$t_h = \varepsilon^{3h} z_1^6 - 2 \varepsilon^{2h} z_1^5 z_2 - 5 \varepsilon^h z_1^4 z_2^2$$
$$- 5 \varepsilon^{4h} z_1^2 z_2^4 + 2 \varepsilon^{3h} z_1 z_2^5 + \varepsilon^{2h} z_2^6,$$
$$W_h = - \varepsilon^{4h} z_1^8 - \varepsilon^{3h} z_1^7 z_2 - 7 \varepsilon^{2h} z_1^6 z_2^2 + 7 \varepsilon^h z_1^5 z_2^3$$
$$- 7 \varepsilon^{4h} z_1^3 z_2^5 - 7 \varepsilon^{3h} z_1^2 z_2^6 + \varepsilon^{2h} z_1 z_2^7 - \varepsilon^h z_2^8.$$

Intendendo per t_0, W_0 le t, W, può dirsi che le radici della (1) sono:

$$Y_h = a W_h + b t_h W_h \quad (h = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Posto quindi:

$$S_i = \sum_{h=0}^{4} Y_h^i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

si ha per le formole di NEWTON *:

$$A = - S_1 ,$$
$$2B = - S_2 + S_1^2 ,$$
$$6C = - 2S_3 + 3S_1 S_2 - S_1^3 ,$$
$$24D = - 6S_4 + 8S_3 S_1 - 6S_2 S_1^2 + 3S_2^2 + S_1^4 ,$$

inoltre:

$$E = - \prod_{h=0}^{4} Y_h .$$

Anzitutto dunque abbiamo:

$$A = - \sum_{h=0}^{4} Y_h = - \left[a \sum_{h=0}^{4} W_h + b \sum_{h=0}^{4} t_h W_h \right] .$$

Le $\sum_{h=0}^{4} W_h$, $\sum_{h=0}^{4} t_h W_h$, essendo simmetriche rispetto ai 5 ottaedri, saranno funzioni razionali intere di z_1, z_2 invarianti rispetto al gruppo ottaedrico, e quindi, essendo di grado < 60, dovranno potersi esprimere razionalmente mediante f, H, T. I loro gradi sono 8 e 14; ma nessuna funzione razionale intera di f, H, T può avere questi gradi, quindi $A = 0$.

Parimenti, tenuto conto che $S_1 = 0$, si ha:

---

* Le *formole di* NEWTON legano le *funzioni simmetriche semplici* (somme di più quantità, dei loro prodotti binari, ternari, etc.) c_h alle *funzioni simmetriche complete* (somme delle potenze simili) s_h; esse possono riassumersi nella formola seguente:

$$h c_h = s_1 c_{h-1} - s_2 c_{h-2} + s_3 c_{h-3} - \dots - (-1)^h s_h .$$

$$B = -\frac{1}{2}\sum_{h=0}^{4} Y_h^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left[a^2\sum_{h=0}^{4} W_h^2 + 2\,ab\sum_{h=0}^{4} t_h W_h^2 + b^2\sum_{h=0}^{4} t_h^2 W_h^2\right].$$

Le funzioni che figurano nei 3 termini di quest'ultima espressione dovrebbero essere dei gradi 16, 22, 28; ma nessuna funzione di questi gradi può formarsi mediante f, H, T, quindi $B = 0$.

Veniamo al calcolo di C. Si ha, essendo $S_1 = S_2 = 0$:

$$C = -\frac{1}{3}S_3 = -\frac{1}{3}\left[a^3\sum_{h=0}^{4} W_h^3 + 3a^2b\sum_{h=0}^{4} t_h W_h^3 \right.$$

$$\left. + 3ab^2\sum_{h=0}^{4} t_h^2 W_h^3 + b_3\sum_{h=0}^{4} t_h^3 W_h^3\right].$$

I 4 termini sono rispettivamente dei gradi 24, 30, 36, 42; ora le sole funzioni di questi gradi che si possano formare con f, H, T sono rispettivamente:

$$f^2, \quad T, \quad f^3, \quad f\,T,$$

quindi si ha, indicando con $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ quattro costanti:

$$\sum_{h=0}^{4} W_h^3 = \alpha_0 f^2, \qquad \sum_{h=0}^{4} t_h W_h^3 = \alpha_1 T,$$

$$\sum_{h=0}^{4} t_h^2 W_h^3 = \alpha_2 f^3, \qquad \sum_{h=0}^{4} t_h^3 W_h^3 = \alpha_3 f\,T.$$

Per determinare le costanti, basta paragonare i termini del massimo grado in z^1 nei due membri di ciascuna equazione.

Nel secondo membro della prima equazione il termine di massimo grado in z_1 è $\alpha_0 z_1^{22} z_2^2$. D'altra parte:

$$W_h^3 = -\varepsilon^{2h} z_1^{24} - 3\varepsilon^h z_1^{23} z_2 - 24 z_1^{22} z_2^2 - 22\varepsilon^{4h} z_1^{21} z_2^3 + \cdots,$$

quindi, essendo $\sum_{h=0}^{4} \varepsilon^{rh} = 0$ per $r \not\equiv 0 \pmod 5$, il termine di massimo grado in $\sum_{h=0}^{4} W_h^3$ è $-5.24 z_1^{22} z_2^2$. Ne segue $\alpha_0 = -120$.

Nella seconda equazione il primo termine del 2° membro è $\alpha_1 z_1^{30}$, e il primo termine del 1° membro è $-5 z_1^{30}$; quindi $\alpha_1 = -5$.

Nella terza equazione il primo termine del 2° membro è $\alpha_2 z_1^{33} z_2^3$. Quanto al 1° membro, si ha:

$$t_h^2 W_h^3 = (\varepsilon^h z_1^{12} - 4 z_1^{11} z_2 - 6\varepsilon^{4h} z_1^{10} z_2^2 + 20\varepsilon^{3h} z_1^9 z_2^3 + \cdots) \times$$
$$\times (-\varepsilon^{2h} z_1^{24} - 3\varepsilon^h z_1^{23} z_2 - 24 z_1^{22} z_2^2 - 22\varepsilon^{4h} z_1^{21} z_2^3 + \cdots);$$

il termine in $z_1^{33} z_2^3$ ha per coefficiente 72, quindi il termine stesso nella somma $\sum_{h=0}^{4} t_h^2 W_h^3$ avrà per coefficiente 360, sicchè $\alpha_2 = 360$.

Infine nell'ultima equazione il primo termine del 2° membro è $\alpha_3 z_1^{41} z_2$. D'altra parte:

$$t_h W_h = -\varepsilon^{2h} z_1^{14} + \varepsilon^h z_1^{13} z_2 + 26\varepsilon^{4h} z_1^{11} z_2^3 + \cdots,$$

quindi:

$$t_h^3 W_h^3 = -\varepsilon^h z_1^{42} + 3 z_1^{41} z_2 + \cdots,$$

e il coefficiente di $z_1^{41} z_2$ in $\sum_{h=0}^{4} t_h^3 W_h^3$ è 15, sicchè $\alpha_3 = 15$.

Dunque:

$$C = -\frac{1}{3}[-120a^3f^2 - 15a^2bT + 1080\,ab^2f^3 + 15b^3fT],$$

ossia:

$$C = 5[8\,a^3f^2 + a^2\,b\,T - 72\,a\,b^2f^3 - b^3f\,T].$$

Calcoliamo analogamente D. Si ha, essendo $S_1 = S_2 = 0$:

$$D = -\frac{1}{4}S_4 = -\frac{1}{4}\Big[a^4\sum_{h=0}^{4} W_h^4 + 4\,a^3\,b\sum_{h=0}^{4} t_h W_h^4$$
$$+ 6\,a^2b^2\sum_{h=0}^{4} t_h^2\,W_h^4 + 4\,a\,b^3\sum_{h=0}^{4} t_h^3\,W_h^4 + b^4\sum_{h=0}^{4} t_h^4\,W_h^4\Big].$$

I 5 termini sono rispettivamente dei gradi 32, 38, 44, 50, 56. Nessuna funzione di grado 38 può formarsi con f, H, T; le sole funzioni dei gradi 32, 44, 50, 56 sono le seguenti:

$$f\,H,\quad f^2\,H,\quad H\,T,\quad f^3\,H.$$

Si ha quindi, indicando con β_0, β_2, β_3, β_4 delle costanti:

$$\sum_{h=0}^{4} W_h^4 = \beta_0 f\,H,\quad \sum_{h=0}^{4} t_h\,W_h^4 = 0,\quad \sum_{h=0}^{4} t_h^2\,W_h^4 = \beta_2 f^2 H,$$
$$\sum_{h=0}^{4} t_h^3\,W_h^4 = \beta_3\,H\,T,\qquad \sum_{h=0}^{4} t_h^4\,W_h^4 = \beta_4 f^3\,H.$$

Nella prima equazione il primo termine del 2° membro è $-\beta_0 z_1^{31} z_2$. Quanto al 1° membro, si ha:

$$W_h^4 = \varepsilon^h z_1^{32} + 4 z_1^{31} z_2 + 34\,\varepsilon^{4h} z_1^{30} z_2^2 + \cdots,$$

quindi il primo termine del 1° membro è $20\,z_1^{31} z_2$, sicchè $\beta_0 = -20$.

Nella terza equazione il primo termine del 2° membro è $-\beta_2 z_1^{42} z_2^2$. D'altra parte, riprendendo l'espressione già usata di t_h^2, si ha:

$$t_h^2 W_h^4 = (\varepsilon^h z_1^{12} - 4 z_1^{11} z_2 - 6 \varepsilon^{4h} z_1^{10} z_2^2 + \cdots) \times$$
$$\times (\varepsilon^h z_1^{32} + 4 z_1^{31} z_2 + 34 \varepsilon^{4h} z_1^{30} z_2^2 + \cdots) = \varepsilon^{2h} z_1^{44} + 12 z_1^{42} z_2^2 + \cdots,$$

da cui $\beta_2 = -60$.

Nella quarta equazione il primo termine del 2° membro è $-\beta_3 z_1^{50}$, il primo termine del 1° membro è $5 z_1^{50}$, quindi $\beta_3 = -5$.

Nell'ultima equazione il primo termine del 2° membro è $-\beta_4 z_1^{53} z_2^3$. Quanto al 1° membro, scriviamo l'espressione trovata di $t_h W_h$ per un istante come segue:

$$t_h W_h = p z_1^{14} + q z_1^{13} z_2 + r z_1^{12} z_2^2 + s z_1^{11} z_2^3 + \cdots;$$

il coefficiente di $z_1^{53} z_2^3$ in $t_h^4 W_h^4$ sarà, come è facile vedere:

$$4 p^3 s + 4 q^3 p + 12 p^2 q r.$$

Ora:

$$p = -\varepsilon^{2h}, \quad q = \varepsilon^{'}, \quad r = 0, \quad s = 26 \varepsilon^{4h},$$

quindi il coefficiente cercato è -108, e si ha: $\beta_4 = 540$.

Dunque:

$$D = -\frac{1}{4}[-20 a^4 f H - 360 a^2 b^2 f^2 H$$
$$-20 a b^3 H T + 540 b^4 f^3 H],$$

ossia:

$$D = 5[a^4 f H + 18 a^2 b^2 f^2 H + a b^3 H T - 27 b^4 f^3 H].$$

Per trovare l'espressione di E, seguiremo una

via alquanto diversa. Si ha:

$$E = -\prod_{h=0}^{4} Y_h = -\prod_{h=0}^{4} W_h \cdot \prod_{h=0}^{4} (a + b\,t_h)$$

$$= b^5 \prod_{h=0}^{4} W_h \cdot \prod_{h=0}^{4} \left(-\frac{a}{b} - t_h\right).$$

Ora $\prod_{h=0}^{4} W_h$ è una forma icosaedrica di 40° grado, e quindi coincide con H^2 a meno d'un fattore costante; osservando poi che il primo termine di H^2 è z_1^{40}, e il primo termine di $\prod_{h=0}^{4} W_h$ è $-z_1^{40}$, risulta che quel fattore è -1, sicchè:

$$\prod_{h=0}^{4} W_h = -H^2.$$

Riguardo all'altro fattore, ricordiamo che le t_h sono le radici dell'equazione (11) dell'art. prec., sicchè si ha, u essendo una indeterminata qualunque:

$$\prod_{h=0}^{4} (u - t_h) = u(u^4 + 10 f u^2 + 45 f^2) - T.$$

Ne segue:

$$b^5 \prod_{h=0}^{4} \left(-\frac{a}{b} - t_h\right)$$

$$= -(a^5 + 10\,a^3 b^2 f + 45\,a b^4 f^2 + b^5 T),$$

e quindi:

$$E = a^5 H^2 + 10\,a^3 b^2 f H^2 + 45\,a b^4 f^2 H^2 + b^5 H^2 T.$$

L'equazione cercata è dunque:

$$Y^5 + 5[8a^3f^2 + a^2bT - 72ab^2f^3 - b^3fT]Y^2$$
$$+ 5[a^4fH + 18a^2b^2f^2H + ab^3HT - 27b^4f^3H]Y$$
$$+ [a^5H^2 + 10a^3b^2fH^2 + 45ab^4f^2H^2 + b^5H^2T] = 0.$$

Di qui si può ottenere una risolvente in senso stretto, ponendo per a, b delle funzioni di z_1, z_2 tali che Y risulti di grado zero, cioè risulti funzione della sola z. A tal uopo basta porre, indicando con m, n due costanti:

$$a = \frac{12mf}{H}, \quad b = \frac{144nf^3}{TH} \text{ *}.$$

Introducendo le due funzioni di z invarianti rispetto al sottogruppo tetraedrico considerato:

$$u = \frac{12f^2t}{T}, \quad v = \frac{12fW}{H},$$

e tenendo conto della relazione (art. 127):

$$Z - 1 : Z : 1 = T^2 : - H^3 : 12^3f^5,$$

si ha:

$$Y = mv + nuv,$$

mentre l'equazione diviene:

---

* Ciò che è essenziale è, che a sia di grado -8 e b di grado -14. Ora le funzioni invarianti più semplici di questi gradi sono appunto $\frac{f}{H}$ e $\frac{f^3}{TH}$.

$$Y^5 - \frac{5}{Z}\left(8m^3 + 12m^2 n + \frac{6mn^2 + n^3}{1 - Z}\right)Y^2$$
$$+ \frac{15}{Z}\left(-4m^4 + \frac{6m^2n^2 + 4mn^3}{1 - Z} + \frac{3}{4}\frac{n^4}{(1-Z)^2}\right)Y$$
$$- \frac{3}{Z}\left(48m^5 - \frac{40m^3n^2}{1 - Z} + \frac{15mn^4 + 4n^5}{(1 - Z)^2}\right) = 0.$$

Scrivendo per brevità questa equazione così:

$$Y^5 + 5\alpha Y^2 + 5\beta Y + \gamma = 0,$$

il suo discriminante è:

$$5^5[108\alpha^5\gamma - 135\alpha^4\beta^2 + 90\alpha^2\beta\gamma^2 - 320\alpha\beta^3\gamma + 256\beta^5 + \gamma^4] \text{ *}.$$

---

* Ecco un procedimento abbastanza semplice per ottenere il discriminante.

Cerchiamo di formare il risultante dell'equazione:

$$\varphi \equiv Y^5 + 5\alpha Y^2 + 5\beta Y + \gamma = 0$$

e della sua derivata. Invece di queste due equazioni possono prendersi le due:

$$\frac{1}{5}\varphi' \equiv Y^4 + 2\alpha Y + \beta = 0, \quad \psi \equiv -\frac{1}{5}\varphi' Y + \varphi \equiv 3\alpha Y^2 + 4\beta Y + \gamma = 0,$$

od anche le due:

$$\psi = 0, \quad \chi \equiv \frac{2}{5}\beta\varphi' - \alpha\psi \equiv 2\beta Y^4 - 3\alpha^2 Y^2 + (2\beta^2 - \alpha\gamma) = 0.$$

Dalla prima si ha:

$$-4\beta Y = 3\alpha Y^2 + \gamma,$$

e quindi:

$$16\beta^2 Y^2 = 9\alpha^2 Y^4 + 6\alpha\gamma Y^2 + \gamma^2,$$

ossia:

$$\omega \equiv 9\alpha^2 Y^4 + (6\alpha\gamma - 16\beta^2) Y^2 + \gamma^2 = 0.$$

Il risultante delle $\omega = 0$, $\chi = 0$ è, come è noto (v. per

Osserviamo che la radice quadrata del discriminante, essendo eguale al prodotto delle differenze delle radici, è una funzione simmetrica delle W_h, t_h, e quindi una funzione razionale di f, H, T. Sarebbe alquanto lungo valutare questa funzione, la cui espressione analitica non ci interessa.

---

es.: PASCAL, *Repertorio di matematiche superiori*, Vol. I, pag. 108):

$$\begin{vmatrix} -27\alpha^4-2\beta(6\alpha\gamma-16\beta^2) & 9\alpha^2(2\beta^2-\alpha\gamma)-2\beta\gamma^2 \\ 9\alpha^2(2\beta^2-\alpha\gamma)-2\beta\gamma^2 & (2\beta^2-\alpha\gamma)(6\alpha\gamma-16\beta^2)+3\alpha^2\gamma^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -27\alpha^4+32\beta^3-12\alpha\beta\gamma & 18\alpha^2\beta^2-9\alpha^3\gamma-2\beta\gamma^2 \\ 18\alpha^2\beta^2-9\alpha^3\gamma-2\beta\gamma^2 & 28\alpha\beta^2\gamma-32\beta^4-3\alpha^2\gamma^2 \end{vmatrix}=0,$$

ossia, togliendo il fattore $-4\beta^2$:

$$108\alpha^5\gamma-135\alpha^4\beta^2+90\alpha^2\beta\gamma^2-320\alpha\beta^3\gamma+256\beta^5+\gamma^4=0.$$

Indicando dunque con $\Delta^2(Y)$ il discriminante, cioè il prodotto dei quadrati delle differenze delle radici, e con k un fattore numerico da determinarsi, si ha:

$$\Delta^2(Y)=k[108\alpha^5\gamma-135\alpha^4\beta^2+90\alpha^2\beta\gamma^2-320\alpha\beta^3\gamma+256\beta^5+\gamma^4].$$

Per calcolare k, consideriamo un caso speciale; supponiamo cioè $\alpha=\gamma=0$, $5\beta=-1$, per modo che le radici dell'equazione sono ± 1, $\pm i$, 0. Siccome $\Delta(Y)$ è il determinante di VANDERMONDE, si ha:

$$\Delta(Y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -i & i & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-16i,$$

mentre $\Delta^2(Y)=-\frac{256}{5^5}k$; ne segue $k=5^5$.

150. Vogliamo ora calcolare una risolvente di 6° grado dell'equazione icosaedrica.

Il gruppo icosaedrico contiene 6 sottogruppi diedrici equivalenti d'ordine 10, uno dei quali è quello generato dalle sostituzioni S, U, e gli altri si ottengono da esso applicando quelle sostituzioni che mutano la diagonale 1.12 nelle altre diagonali 2.7, 3.8, 4.9, 5.10, 6.11. Tali sostituzioni sono rispettivamente T, TS, TS^2, TS^3, TS^4.

Le sostituzioni S, U sono, sotto forma omogenea:

$$z_1' = \varepsilon^3 z_1, \quad z_2' = \varepsilon^2 z_2; \qquad z_1' = - z_2, \quad z_2' = z_1 .$$

Ambedue ci dànno:

$$(z_1' z_2')^2 = (z_1 z_2)^2,$$

sicchè $\varphi = 5 z_1^2 z_2^2$ è una funzione invariante per le sostituzioni del sottogruppo diedrico considerato. Scrivendo la risolvente così:

$$\varphi^6 + A\varphi^5 + B\varphi^4 + C\varphi^3 + D\varphi^2 + E\varphi + F = 0, \tag{1}$$

le A, B, C, D, E, F saranno forme invarianti rispetto al gruppo icosaedrico dei gradi 4, 8, 12, 16, 20, 24. Dovendo queste forme esprimersi per f, H, T, saranno A, B, D nulle, e inoltre:

$$C = \alpha f, \quad E = \beta H, \quad F = \gamma f^2,$$

dove α, β, γ denotano tre coefficienti costanti. La (1) diviene dunque:

$$\varphi^6 + \alpha f \varphi^3 + \beta H \varphi + \gamma f^2 = 0.$$

Per determinare α, β, γ, mettiamo al posto di φ, f, H le loro espressioni; avremo:

$$5^6 z_1^{12} z_2^{12} + \alpha . 5^3 z_1^6 z_2^6 (z_1^{11} z_2 - 11 z_1^6 z_2^6 - z_1 z_2^{11})$$
$$+ \beta . 5 z_1^2 z_2^2 (- z_1^{20} - 228 z_1^{15} z_2^5 - 494 z_1^{10} z_2^{10} + \cdots)$$
$$+ \gamma (z_1^{22} z_2^2 - 22 z_1^{17} z_2^7 + 119 z_1^{12} z_2^{12} + \cdots) = 0,$$

quindi, eguagliando a zero i coefficienti di $z_1^{22} z_2^2$, $z_1^{17} z_2^7$, $z_1^{12} z_2^{12}$:

$$-5\beta + \gamma = 0, \quad 5^3 \alpha - 5 . 228 \beta - 22 \gamma = 0,$$
$$5^6 - 5^3 . 11 \alpha - 5 . 494 \beta + 119 \gamma = 0,$$

che, risolte, ci dànno:

$$\alpha = 10, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 5.$$

L'equazione cercata è dunque:

$$\varphi^6 + 10 f \varphi^3 + H \varphi + 5 f^2 = 0. \tag{2}$$

Per avere una vera risolvente, si ponga:

$$\varphi = \frac{12 f^2 \zeta}{H},$$

dove φ è una funzione della sola z; si ottiene:

$$\zeta^6 + 10 Z \zeta^3 + 12 Z^2 \zeta + 5 Z^2 = 0.$$

Si può dare alla risolvente un'altra forma, ponendo nella (2):

$$\varphi^3 = - f \xi. \tag{3}$$

Per fare questa sostituzione, scriviamo la (2) così:

$$- H \varphi = \varphi^6 + 10 f \varphi^3 + 5 f^2,$$

donde:

$$(\varphi^6 + 10 f \varphi^3 + 5 f^2)^3 + H^3 \varphi^3 = 0.$$

Mediante la sostituzione (3) questa equazione diviene:

$$(\xi^2 - 10 \xi + 5)^3 + 1728 Z = 0,$$

ossia:

$$Z = \frac{(\xi^2 - 10\xi + 5)^3}{-1728\xi},$$

da cui:

$$(4) \quad Z - 1 = \frac{(\xi^2 - 10\xi + 5)^3 + 1728\xi}{-1728\xi}.$$

Per ottenere la scomposizione in fattori del numeratore, ricorriamo ad un'osservazione geometrica. Le sostituzioni del sottogruppo considerato scambiano tra loro i punti di mezzo dei seguenti spigoli:

a) 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 7.12, 8.12, 9.12, 10.12, 11.12;
b) 2.3, 3.4, 4.5, 5.6, 6.2, 7.8, 8.9, 9.10, 10.11, 11.7;
c) 2.10, 3.11, 4.7, 5.8, 6.9;
d) 2.9, 3.10, 4.11, 5.7, 6.8.

Considerando pertanto che il numeratore della (4) deve annullarsi nei punti di mezzo degli spigoli (perchè in questi punti $Z = 1$), si vede che delle sue 6 radici due devono essere doppie e due semplici, sicchè:

$$(\xi^2 - 10\xi + 5)^3 + 1728\xi = (\xi^2 + \alpha\xi + \beta)^2 (\xi^2 + \gamma\xi + \delta).$$

Di qui segue:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} -30 &= 2\alpha + \gamma, \\ 315 &= \alpha^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta + \delta, \\ -1300 &= \alpha^2\gamma + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\delta, \\ 1575 &= \alpha^2\delta + 2\alpha\beta\gamma + 2\beta\delta + \beta^2, \\ 978 &= \beta^2\gamma + 2\alpha\beta\delta, \\ 125 &= \beta^2\delta. \end{aligned} \right.$$

Invece che risolvere direttamente queste equa-

zioni, ammettiamo *a priori* che esse abbiano una soluzione formata da numeri interi. Allora l'ultima non può ammettere che queste sole soluzioni:

$$\beta = \pm 5, \quad \delta = 5; \qquad \beta = \pm 1, \quad \delta = 125;$$

d'altra parte dalla 1ª segue $\alpha \equiv \gamma$ (mod 3), e quindi dalla 3ª $\beta \equiv \delta$ (mod 3), sicchè di queste 4 soluzioni le sole due possibili sono:

$$\beta = 5, \quad \delta = 5; \qquad \beta = -1, \quad \delta = 125.$$

La prima renderebbe il 2° membro della penultima equazione (5) multiplo di 5, mentre non lo è il primo membro; quindi dev'essere:

$$\beta = -1, \quad \delta = 125.$$

Le (5) dànno poi:

$$\alpha = -4, \quad \gamma = -22,$$

sicchè la risolvente cercata è:

$$Z-1 : Z : 1$$
$$= (\xi^2 - 4\xi - 1)^2(\xi^2 - 22\xi + 125) : (\xi^2 - 10\xi + 5)^3 :$$
$$-1728\xi.$$

151. Il concetto di risolvente può estendersi anche all'equazione modulare.

Se Γ_s è un sottogruppo d'indice finito s del gruppo modulare, ogni funzione u invariante per questo sottogruppo è legata a J da un'equazione algebrica:

$$(1) \qquad f(u, J) = 0$$

di grado s rispetto ad u. Questa equazione può chiamarsi una *risolvente* dell'equazione modulare, in questo senso, che, risolta questa equazione, cioè

trovata l'espressione della funzione u di J che soddisfa alla (1), basterà saper esprimere z per u per avere l'espressione di z mediante J. In altre parole, risolta la (1), la risoluzione dell'equazione modulare principale:

$$J = J(z)$$

è ridotta alla risoluzione dell'equazione modulare relativa al sottogruppo Γ_s:

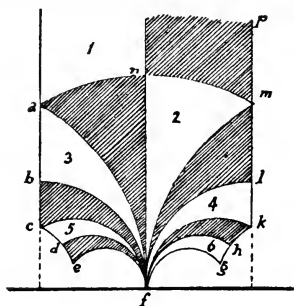
$$u = u(z),$$

e questo problema può considerarsi come più semplice del precedente, perchè la rete di Γ_s è più semplice della rete di Γ.

L'equazione diedrica per $m = 3$, e le equazioni tetraedrica, ottaedrica ed icosaedrica, sono risolventi dell'equazione modulare corrispondenti ai sottogruppi $\Gamma_{[2]}$, $\Gamma_{[3]}$, $\Gamma_{[4]}$, $\Gamma_{[5]}$.

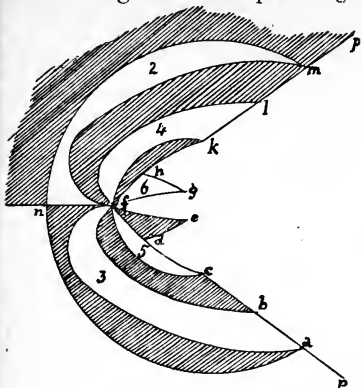
Noi costruiremo, come esempio, altre due risolventi, una di 5° ed una di 6° grado, corrispondenti al sottogruppo $\Gamma_{[5]}$; esse sono necessariamente equivalenti all'equazione icosaedrica, ed infatti troveremo che coincidono con due risolventi (equivalenti) di essa già costruite.

Abbiamo veduto (art. 113) che, se p è numero primo, $G_{\mu(p)}$ contiene $p+1$ sottogruppi emimetaciclici $G_{\frac{p(p-1)}{2}}$; a questi corrispondono altrettanti sottogruppi di Γ d'indice $p+1$. In par-

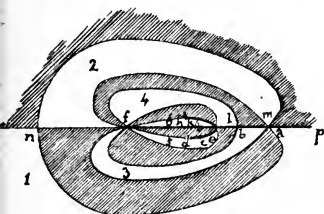
ticolare per $p = 5$ si hanno 6 sottogruppi d'indice 6, i quali contengono tutti il sottogruppo $\Gamma_{[5]}$. Uno di essi è costituito dalle sostituzioni modulari permutabili col gruppo ciclico generato dalla $\acute{S}$, quindi contiene la S stessa. Ne segue che il suo campo fondamentale è tutto compreso in una striscia di larghezza 1 parallela all'asse imaginario. L'espressione generale delle sostituzioni del sottogruppo è (art. 109):

(Fig. 47).

$$z' \equiv \frac{\alpha z + \beta}{\alpha^{-1}} \pmod 5;$$

ne risulta senza difficoltà che il gruppo è permutabile colla pseudosostituzione $z' = -\bar{z}$, sicchè il suo campo fondamentale può prendersi simmetrico rispetto all'asse imaginario. Aggiungendo a queste condizioni le altre, che il campo è connesso e consta di 12 triangoli, e partendo per costruirlo dal bitriangolo 1 della rete modulare, si ottiene immediatamente il campo disegnato nella fig. 47. Mediante una deformazione continua di cui una fase intermedia è rappresentata nella figura 48, noi possiamo portare il campo a ricoprire un intero piano, che diremo piano u, e noi faremo ciò in modo che

l'asse imaginario del piano z, mantenendo la sua forma rettilinea, vada a coincidere coll'asse reale del piano u, e che su questo asse vengano a cadere tutti i nodi del campo meno i nodi d, h (fig. 49). Allora, posto $u = \frac{1}{v}$, l'equazione modulare:

(Fig. 48).

$$J(z) = J$$

avrà una risolvente di 6° grado in v; i coefficienti di questa saranno funzioni razionali di 1° grado di J, giacchè ad ogni valore di v corrisponde un unico valore di J. Potremo quindi scrivere la risolvente considerata come segue:

(Fig. 49).

$$J - 1 : J : 1 = \varphi(v) : \psi(v) : \chi(v),$$

dove $\varphi(v)$, $\psi(v)$, $\chi(v)$ sono polinomi di 6° grado al più.

Supporremo che nel punto f cada l'origine del piano u.

I nodi di 1ª specie sono n, d, h, bl *; quelli di 2ª specie am, $cegk$; quelli di 3ª specie f, p. I punti n, b, in ciascuno dei quali concorrono 4 triangoli, devono considerarsi come doppi; i punti d, h, in ciascuno dei quali concorrono 2 triangoli, come semplici. Parimenti a, c sono tripli, e f è quintuplo. Quindi il polinomio $\varphi(v)$ ha due radici doppie e due semplici, $\psi(v)$ due radici triple, $\chi(v)$ una radice quintupla ed una semplice. Inoltre la radice quintupla di $\chi(v)$ è $v = \infty$, la semplice $v = 0$, sicchè si ha, a meno d'un fattore costante, $\chi(v) = v$. Noi porremo:

$$\chi(v) = -1728\,v;$$

inoltre:

$$\varphi(v) = \lambda\,(v^2 + \alpha v + \beta)^2 (v^2 + \gamma v + \delta),$$
$$\psi(v) = \mu\,(v^2 + \varepsilon v + \zeta)^3.$$

Dalla relazione:

$$(1) \quad \varphi(v) = \psi(v) - \chi(v) = \psi(v) + 1728\,v,$$

che ci dà $\lambda = \mu$, segue:

$$\frac{\varphi(v)}{v} = \frac{\psi(v)}{v} + 1728,$$

e derivando:

$$v\varphi'(v) - \varphi(v) = v\psi'(v) - \psi(v),$$

---

* Con bl intendiamo il punto in cui coincidono dopo la deformazione i punti b ed l.

ossia:

$$(v^2 + \alpha v + \beta)[5 v^4 + (3 \alpha + 4 \gamma) v^3 + (\beta + 3 \delta + 2 \alpha \gamma) v^2 + \alpha \delta v - \beta \delta] = (v^2 + \varepsilon v + \zeta)^2 [5 v^2 + 2 \varepsilon v - \zeta].$$

Poichè i trinomi $(v^2 + \alpha v + \beta)$, $(v^2 + \varepsilon v + \zeta)$ non hanno radici comuni, dev'essere:

$$5 v^2 + 2 \varepsilon v - \zeta = 5 (v^2 + \alpha v + \beta),$$
$$5 v^4 + (3 \alpha + 4 \gamma) v^3 + (\beta + 3 \delta + 2 \alpha \gamma) v^2 + \alpha \delta v - \beta \delta = 5 (v^2 + \varepsilon v + \zeta)^2.$$

Di qui segue:

$$2 \varepsilon = 5 \alpha, \quad -\zeta = 5 \beta, \quad 3 \alpha + 4 \gamma = 10 \varepsilon,$$
$$\beta + 3 \delta + 2 \alpha \gamma = 5 \varepsilon^2 + 10 \zeta,$$
$$\alpha \delta = 10 \varepsilon \zeta, \quad -\beta \delta = 5 \zeta^2.$$

Risolvendo si trova:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{2}{5} \varepsilon, \quad \beta = -\frac{1}{100} \varepsilon^2, \quad \gamma = \frac{11}{5} \varepsilon, \\ \delta = \frac{5}{4} \varepsilon^2, \quad \zeta = \frac{1}{20} \varepsilon^2. \end{array} \right.$$

Dalla (1) si ha poi, paragonando i coefficienti di v e ricordando che $\lambda = \mu$:

$$\lambda [2 \alpha \beta \delta + \beta^2 \gamma - 3 \varepsilon \zeta^2] - 1728 = 0,$$

ossia per le (2):

$$\lambda \varepsilon^5 = -10^5.$$

A causa dell'arbitrarietà che vi è nella deformazione da noi eseguita, il coefficiente λ può prendersi a piacere; facendo $\lambda = 1$, si ha $\varepsilon^5 = -10^5$. Ora ε è la somma, col segno cambiato, dei valori di v corrispondenti ai punti a, c, valori che sono reali; quindi $\varepsilon = -10$.

Dalle (2) segue poi:

$$\alpha = -4, \quad \beta = -1, \quad \gamma = -22,$$
$$\delta = 125, \quad \varepsilon = -10, \quad \zeta = 5,$$

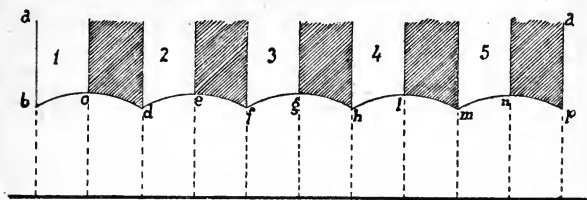
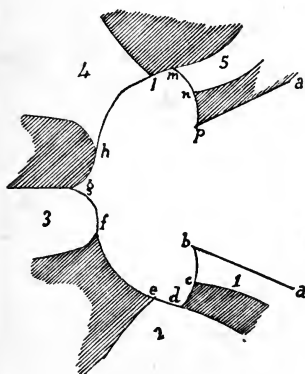
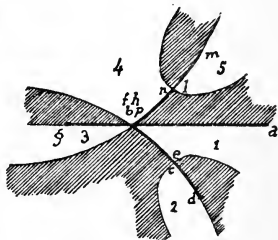
sicchè la risolvente cercata è:

$$J-1 : J : 1 = (v^2 - 4v - 1)^2 (v^2 - 22v + 125)$$
$$: (v^2 - 10v + 5)^3 : -1728v.$$

Essa è identica alla risolvente dell'equazione icosaedrica trovata nell'art. 150.

152. Un'altra risolvente dell'equazione modulare si può ottenere osservando che, per essere $5 \equiv -3 \pmod 8$, $G_{\mu(5)}$ contiene $\frac{5(5^2-1)}{24} = 5$ sottogruppi tetraedrici equivalenti G_{12}, ai quali corrispondono 5 sottogruppi equivalenti Γ_5 di indice 5 di Γ contenenti tutti $\Gamma_{[5]} = \Gamma_{60}$. Questa risolvente sarà pertanto di 5° ordine.

Siccome S e le sue potenze, considerate come sostituzioni di $G_{\mu(5)}$, sono d'ordine 5, così esse non possono far parte d'un gruppo tetraedrico; quindi i bitriangoli $1, S, S^2, S^3, S^4$ non sono omologhi tra loro rispetto a nessuno dei Γ_5. Ciò basta per poter concludere che l'insieme di questi bitriangoli costituisce un campo fondamentale per uno dei Γ_5. Infatti, se noi stabiliamo la corrispondenza dei lati di questa figura così: ab, ap; bd, fd; fg hg; hm, pm, e se deformando il poligono lo riduciamo ad una superficie chiusa, cioè ad un piano, la rete di cui questo piano risulta ri-

coperto soddisfa alle condizioni del teorema d'esistenza dei sottogruppi (art. 97), come meglio vedremo tra poco esaminando i singoli nodi, ed

(Fig. 50).

(Fig. 51).

(Fig. 52).

ha il simbolo (2, 3, 5), quindi esiste un sottogruppo d'indice 5 che ha per campo fondamentale il dato poligono, e questo sottogruppo deve contenere $\Gamma_{[5]}$, sicchè deve coincidere con uno dei 5 considerati. Quanto ai nodi, quelli di 1ª specie sòno *c e*,

g, ln; quelli di 2ª $bfhp$, d, m; quelli di 3ª si riducono al solo a. I punti c, l sono doppî, il punto g è semplice; il punto b è triplo, i punti d, m sono semplici; il punto a è quintuplo. La risolvente avrà qundi la forma:

$$J-1 : J : 1 = \varphi(u) : \psi(u) : \chi(u),$$

dove:

$$\varphi(u) = \lambda(u^2 + \alpha u + \beta)^2 (u - \gamma),$$
$$\psi(u) = \mu(u^2 + \delta u + \varepsilon)(u - \zeta)^3, \quad \chi(u) = \nu(u - \eta)^5.$$

Supponiamo che u rappresenti l'affisso dei punti del piano sul quale abbiamo disteso la rete, che agf sia una retta coincidente coll'asse reale del piano stesso, inoltre che g sia l'origine ed f abbia per ascissa -3. Allora sarà $\eta = \infty$, quindi $\chi(u)$ si ridurrà ad una costante, sicchè potremo porre:

$$\chi(u) = 1728;$$

per conseguenza dalla:

$$\varphi(u) = \psi(u) - \chi(u) \tag{1}$$

avremo $\lambda = \mu$. Inoltre sarà:

$$\gamma = 0, \quad \zeta = -3,$$

e la (1) diverrà:

$$\lambda u(u^2 + \alpha u + \beta)^2 = \lambda(u+3)^3(u^2 + \delta u + \varepsilon) - 1728. \tag{2}$$

Derivando abbiamo:

$$(u^2 + \alpha u + \beta)[(u^2 + \alpha u + \beta) + 2u(2u + \alpha)]$$
$$= (u+3)^2 [3(u^2 + \delta u + \varepsilon) + (u+3)(2u + \delta)],$$

ossia:

$$(u^2 + \alpha u + \beta)(5u^2 + 3\alpha u + \beta)$$
$$= (u+3)^2 [5u^2 + (4\delta + 6)u + (3\varepsilon + 3\delta)].$$

Col solito ragionamento si trova:

$$5(u^2 + \alpha u + \beta) = 5u^2 + (4\delta + 6)u + (3\varepsilon + 3\delta),$$
$$5u^2 + 3\alpha u + \beta = 5(u+3)^2,$$

da cui:

$$5\alpha = 4\delta + 6, \quad 5\beta = 3\varepsilon + 3\delta, \quad 3\alpha = 30, \quad \beta = 45,$$

e risolvendo:

$$\alpha = 10, \quad \beta = 45, \quad \delta = 11, \quad \varepsilon = 64.$$

Se poi nella (2) si fa $u = 0$, si ha:

$$\lambda = \frac{1728}{27\varepsilon} = 1.$$

La risolvente è dunque:

$$J - 1 : J : 1$$
$$= u(u^2 + 10u + 45)^2 : (u+3)^3(u^2 + 11u + 64) : 1728;$$

essa coincide con quella trovata per l'equazione icosaedrica nell'art. 148.

Rapporti tra le equazioni poliedriche e la teoria della risoluzione algebrica delle equazioni.

153. Abbiasi un'equazione generale del 3° grado, che possiamo imaginare ridotta alla forma:

$$(1) \qquad x^3 + 3ax + 2b = 0$$

mediante una sostituzione lineare; e sieno x_1, x_2, x_3 le sue radici, fra le quali avrà luogo la relazione:

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{3} x_i = 0.$$

Considerando a, b come variabili, x_1, x_2, x_3 possono rappresentare le coordinate omogenee dei

punti della retta (2), e ad ogni permutazione di esse corrisponde una trasformazione proiettiva della retta in sè stessa, quindi una trasformazione lineare dell'ascissa z dei punti della retta. Le 6 permutazioni delle x_1, x_2, x_3 dànno origine così a 6 sostituzioni lineari di z, formanti un gruppo oloedricamente isomorfo al gruppo delle 6 permutazioni. Ora un gruppo di 6° ordine di sostituzioni lineari non può essere che un gruppo ciclico od un gruppo diedrico; il primo caso è da escludersi, perchè non è ciclico il gruppo delle 6 permutazioni, quindi il gruppo delle 6 sostituzioni lineari di z è diedrico ($m = 3$). Ne segue che la determinazione di z in funzione di a, b si riduce alla risoluzione d'un'equazione diedrica di 6° grado. Osservando poi che, fissata z, sono determinate in modo unico le coordinate x_1, x_2, x_3, può dirsi a *priori* che le x_1, x_2, x_3 saranno esprimibili come funzioni razionali di z. Sicchè può concludersi che *la risoluzione dell'equazione generale di 3° grado può ridursi a quella dell'equazione diedrica di 6° grado.*

Denotiamo, come sempre, le sostituzioni del gruppo diedrico di 6° ordine con:

$$1, S, S^2, T, ST, S^2T,$$

dove le sostituzioni S, T sono rispettivamente:

$$(3) \qquad z' = e^{\frac{2\pi i}{3}} z, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

Alla S possiamo assegnare come corrispon-

dente nel gruppo delle permutazioni delle x_1, x_2, x_3 la $x_2 x_3 x_1$, che è d'ordine 3, alla T la $x_1 x_3 x_2$, che è d'ordine 2. Tenuto conto che z è funzione lineare delle x_1, x_2, x_3, poniamo:

$$z = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3}, \tag{4}$$

e scriviamo per brevità α in luogo di $e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Applicando alla z le sostituzioni (3) ed alle x_1, x_2, x_3 le permutazioni corrispondenti, si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha z &= \frac{a_1 x_2 + a_2 x_3 + a_3 x_1}{b_1 x_2 + b_2 x_3 + b_3 x_1}, \\ \frac{1}{z} &= \frac{a_1 x_1 + a_2 x_3 + a_3 x_2}{b_1 x_1 + b_2 x_3 + b_3 x_2}, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

e quindi, confrontando le (5) colla (4):

$$\frac{\alpha a_1}{a_3} = \frac{\alpha a_2}{a_1} = \frac{\alpha a_3}{a_2} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}, \tag{6}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_3} = \frac{a_3}{b_2} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_3} = \frac{b_3}{a_2}. \tag{7}$$

Se β è il valore comune dei rapporti (6), ε quello dei rapporti (7), si trova immediatamente:

$$\beta = \sqrt[3]{1}, \quad \varepsilon = \sqrt{1};$$

inoltre:

$$a_2 = \alpha^2 \beta a_1, \quad a_3 = \alpha \beta^2 a_1, \quad b_2 = \beta b_1,$$
$$b_3 = \beta^2 b_1, \quad b_1 = \varepsilon a_1, \quad \beta = \alpha^2,$$

quindi può porsi:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \alpha, \quad a_3 = \alpha^2, \quad b_1 = \varepsilon, \quad b_2 = \varepsilon\alpha^2, \quad b_3 = \varepsilon\alpha.$$

È facile persuadersi che è indifferente prendere per ε l'uno o l'altro dei valori ± 1; preso $\varepsilon = +1$, si ha:

$$z = \frac{x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3}{x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3}.$$

Poniamo:

$$(8) \quad x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = p, \quad x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3 = q,$$

sicchè:

$$z = \frac{p}{q};$$

dalle (2), (8) segue, in virtù di proprietà note delle radici dell'unità:

$$(9) \quad x_1 = \frac{1}{3}(p + q), \quad x_2 = \frac{1}{3}(\alpha^2 p + \alpha q),$$
$$x_3 = \frac{1}{3}(\alpha p + \alpha^2 q),$$

inoltre:

$$\begin{aligned} pq &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \\ &= -3(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = -9a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^3 + q^3 &= 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 12 x_1 x_2 x_3 \\ &- 3(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2) \\ &= 2(x_1 + x_2 + x_3)^3 \\ &- 9[x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_1 x_3 (x_1 + x_3) + x_2 x_3 (x_2 + x_3)] \\ &= 27 x_1 x_2 x_3 = -54 b, \end{aligned}$$

ossia:

$$(10) \quad a = -\frac{1}{9} pq, \quad b = -\frac{1}{54}(p^3 + q^3).$$

Introducendo questi valori nell'equazione diedrica a cui soddisfa z:

$$Z = \frac{(z^3+1)^2}{4z^3} = \frac{(p^3+q^3)^2}{4p^3q^3},$$

si ottiene per Z il valore:

$$Z = -\frac{b^2}{a^3}.$$

D'altra parte le (10) possono scriversi:

$$a = -\tfrac{1}{9} z q^2, \quad b = -\tfrac{1}{54}(z^3+1) q^3;$$

ne segue:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{6}\frac{z^3+1}{z} q,$$

quindi:

$$q = \frac{6b}{a}\frac{z}{z^3+1}, \quad p = \frac{6b}{a}\frac{z^2}{z^3+1};$$

e le (9) ci dànno le seguenti espressioni di x_1, x_2, x_3 come funzioni razionali di z:

$$(11)\begin{cases} x_1 = \dfrac{2b}{a}\dfrac{z(z+1)}{z^3+1}, \quad x_2 = \dfrac{2b}{a}\dfrac{\alpha z(\alpha z+1)}{z^3+1}, \\ x_3 = \dfrac{2b}{a}\dfrac{\alpha^2 z(\alpha^2 z+1)}{z^3+1}. \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione diedrica, si ha (art. 147):

$$z = \sqrt[3]{2Z - 1 + 2\sqrt{Z(Z-1)}}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt[3]{-2b^2 - a^3 + 2b\sqrt{b^2+a^3}}$$

$$= -\frac{1}{a}\left(b - \sqrt{b^2+a^3}\right)^{\frac{2}{3}};$$

questo valore, introdotto nelle (11), ci dà la risoluzione dell'equazione (1).

154. Prima di esporre la risoluzione dell'equazione generale del 4° grado, premettiamo un'osservazione, e cioè, che il gruppo delle 24 permutazioni di 4 elementi è oloedricamente isomorfo al gruppo ottaedrico. Infatti esso contiene l'operazione (2341) d'ordine 4 e l'operazione (1243) d'ordine 2, il cui prodotto è l'operazione (2431) d'ordine 3 (art. 104).

Per stabilire effettivamente l'isomorfismo, si possono assegnare ai 4 vertici d'un tetraedro regolare rispettivamente gl'indici 1, 2, 3, 4, e far corrispondere anzitutto ad ogni rotazione del tetraedro su sè stesso la permutazione dei vertici da essa prodotta. È facile persuadersi che le 12 permutazioni corrispondenti alle 12 rotazioni del tetraedro su sè stesso sono tutte pari. Facendo poi corrispondere ad una qualunque delle rotazioni che mutano il tetraedro nel suo polare una qualunque delle permutazioni dispari dei 4 indici 1, 2, 3, 4, si completerà l'isomorfismo.

Le tre rotazioni d'ordine 2 del gruppo tetraedrico hanno per assi le 3 mediane, quindi ciascuna di esse scambia i vertici due a due; ad esse corrispondono dunque le permutazioni (2143), (3412), (4321). Noi supporremo applicati gli indici ai vertici in modo che alla rotazione U corrisponda la permutazione (2143).

Inoltre sceglieremo come corrispondente alla rotazione V la permutazione dispari (2341).

Dopo ciò assumiamo l'equazione del 4° grado sotto la forma *principale*:

$$x^4 + 4ax + b = 0, \tag{1}$$

alla quale si può ridurre l'equazione generale mediante la risoluzione d'una equazione di 2° grado, come vedremo più innanzi. Le 4 radici x_1, x_2, x_3, x_4 soddisfanno allora alle relazioni:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 0; \tag{2}$$

e però, considerandole come le coordinate omogenee dei punti dello spazio, i 24 punti corrispondenti a ciascuna equazione (1) giacciono sopra la conica di equazioni (2), che possiamo dire *conica principale.*

Cerchiamo di costruire una funzione lineare z delle x_i che, per le permutazioni di queste, subisca le sostituzioni corrispondenti del gruppo ottaedrico. Naturalmente basterà accertarsi che ciò accada per le due permutazioni (2341), (2143), a cui sono state assegnate come corrispondenti rispettivamente nel gruppo ottaedrico le V, U. Ricordiamo che le espressioni di queste due sostituzioni sono rispettivamente (art. 64):

$$z' = iz, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

Posto pertanto:

$$z = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4},$$

dovrà essere:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a_1 x_2 + a_2 x_3 + a_3 x_4 + a_4 x_1}{b_1 x_2 + b_2 x_3 + b_3 x_4 + b_4 x_1} \\ = i \dfrac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4}, \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \frac{a_1 x_2 + a_2 x_1 + a_3 x_4 + a_4 x_3}{b_1 x_2 + b_2 x_1 + b_3 x_4 + b_4 x_3} = \frac{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4}.$$

La (3) è soddisfatta identicamente *, se si pone:

$$\frac{a_4}{i a_1} = \frac{a_1}{i a_2} = \frac{a_2}{i a_3} = \frac{a_3}{i a_4} = \frac{b_4}{b_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{b_3}{b_4}.$$

Indicando con γ il valor comune di questi rapporti, si trova:

$$\gamma^4 = 1,$$

$$a_2 = -i\gamma^3 a_1, \quad a_3 = -\gamma^2 a_1, \quad a_4 = i\gamma a_1,$$

$$b_2 = \gamma^3 b_1, \quad b_3 = \gamma^2 b_1, \quad b_4 = \gamma b_1,$$

sicchè, posto $\dfrac{a_1}{b_1} = c$, dove c è da determinarsi, può farsi:

$$a_1 = c, \quad a_2 = -i\gamma^3 c, \quad a_3 = -\gamma^2 c, \quad a_4 = i\gamma c,$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = \gamma^3, \quad b_3 = \gamma^2, \quad b_4 = \gamma.$$

---

* A questo modo si va al di là del necessario; giacchè basterebbe che la (3) fosse soddisfatta tenendo conto delle relazioni (2) che intercedono fra le x_h.

Dopo ciò la (4) diviene:

$$(5) \quad \begin{cases} c\,\dfrac{x_2 - i\gamma^3 x_1 - \gamma^2 x_4 + i\gamma x_3}{x_2 + \gamma^3 x_1 + \gamma^2 x_4 + \gamma x_3} \\ = \dfrac{1}{c}\,\dfrac{x_1 + \gamma^3 x_2 + \gamma^2 x_3 + \gamma x_4}{x_1 - i\gamma^3 x_2 - \gamma^2 x_3 + i\gamma x_4}. \end{cases}$$

È facile vedere che non si può soddisfare identicamente a questa relazione; però possiamo cercare di soddisfare ad essa tenendo conto delle (2). A tal uopo scriviamo la (5) così:

$$c^2(x_2 - i\gamma^3 x_1 - \gamma^2 x_4 + i\gamma x_3)(x_1 - i\gamma^3 x_2 - \gamma^2 x_3 + i\gamma x_4)$$
$$-(x_2 + \gamma^3 x_1 + \gamma^2 x_4 + \gamma x_3)(x_1 + \gamma^3 x_2 + \gamma^2 x_3 + \gamma x_4) = 0.$$

Dovrà essere pertanto identicamente, h, k essendo due costanti da determinarsi:

$$c^2(x_2 - i\gamma^3 x_1 - \gamma^2 x_4 + i\gamma x_3)(x_1 - i\gamma^3 x_2 - \gamma^2 x_3 + i\gamma x_4)$$
$$-(x_2 + \gamma^3 x_1 + \gamma^2 x_4 + \gamma x_3)(x_1 + \gamma^3 x_2 + \gamma^2 x_3 + \gamma x_4)$$
$$+h(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0.$$

Eguagliando a zero i coefficienti dei singoli termini dello sviluppo del primo membro, si ottiene:

$$-i\gamma^3 c^2 - \gamma^3 + h + k = 0, \quad (1-\gamma^2)c^2 - (1+\gamma^2) + 2h = 0,$$
$$2i\gamma c^2 - 2\gamma + 2h = 0,$$

e di qui:

$$c^2 = \frac{1 + \gamma^2 - 2\gamma}{1 - \gamma^2 - 2i\gamma} = \left(\frac{1-\gamma}{1-i\gamma}\right)^2,$$

da cui, scegliendo arbitrariamente il segno:

$$c = \frac{1-\gamma}{1-i\gamma}.$$

Per γ dobbiamo prendere una radice quarta dell'unità tale, che non renda c nè nullo nè infinito;

facendo per es. $\gamma = -1$, si ha:

$$c = \frac{2}{1+i} = 1 - i,$$

quindi:

$$a_1 = 1 - i,\quad a_2 = i(1-i),\quad a_3 = -(1-i), a_4 = -i(1-i),$$
$$b_1 = 1,\quad b_2 = -1,\quad b_3 = 1,\quad b_4 = -1,$$

sicchè l'espressione di z è:

$$z = (1 - i)\frac{x_1 + i x_2 - x_3 - i x_4}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}.$$

Scriviamo per brevità:

$$(6)\quad \begin{cases} p_1 = x_1 + i x_2 + i^2 x_3 + i^3 x_4 = x_1 + i x_2 - x_3 - i x_4, \\ p_2 = x_1 + i^2 x_2 + i^4 x_3 + i^6 x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\ p_3 = x_1 + i^3 x_2 + i^6 x_3 + i^9 x_4 = x_1 - i x_2 - x_3 + i x_4; \end{cases}$$

avremo:

$$(7)\qquad z = (1 - i)\frac{p_1}{p_2},$$

inoltre dalla prima delle (2) e dalle (6):

$$(8)\quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3), \\ x_2 = \frac{1}{4}(i^3 p_1 + i^2 p_2 + i p_3) = \frac{1}{4}(-i p_1 - p_2 + i p_3), \\ x_3 = \frac{1}{4}(i^6 p_1 + i^4 p_2 + i^2 p_3) = \frac{1}{4}(-p_1 + p_2 - p_3), \\ x_4 = \frac{1}{4}(i^9 p_1 + i^6 p_2 + i^3 p_3) = \frac{1}{4}(i p_1 - p_2 - i p_3), \end{cases}$$

equazioni che possiamo riassumere nella seguente:

$$x_{h+1} = \frac{1}{4}(i^{3h} p_1 + i^{2h} p_2 + i^h p_3) \qquad (h = 0, 1, 2, 3).$$

Di qui risulta, per la seconda delle (2):

$$0 = p_1^2 \sum_h i^{6h} + p_2^2 \sum_h i^{4h} + p_3^2 \sum_h i^{2h}$$
$$+ 2 p_2 p_3 \sum_h i^{3h} + 2 p_3 p_1 \sum_h i^{4h} + 2 p_1 p_2 \sum_h i^{5h}.$$

Per le proprietà note delle radici dell'unità, le somme come quelle che entrano nel 2° membro sono tutte nulle, tranne quelle in cui all'esponente figura il fattore 4 o un suo multiplo, le quali hanno il valore 4, sicchè si ha semplicemente:

$$(9) \qquad p_2^2 + 2 p_1 p_3 = 0.$$

Come si vede dalle (6), le p_i si possono considerare come coordinate omogenee dei punti del piano contenente la conica principale, ed allora la (9) è l'equazione della conica stessa. La conica passa pei due vertici (0, 0, 1), (1, 0, 0) del triangolo fondamentale; e z può assumersi come il parametro dei raggi corrispondenti dei due fasci che proiettano la conica da questi due punti, giacchè dalle (7), (9) si ha:

$$(10) \qquad z = (1 - i) \frac{p_1}{p_2} = - \frac{1}{1 + i} \frac{p_2}{p_3}.$$

Indichiamo al solito con s_1, s_2, ... le somme delle potenze simili delle radici della (1). Dalle (2) risulta $s_1 = 0$, $s_2 = 0$; segue poi dalle formole di NEWTON (v. art. 149):

$$s_3 = 3 c_3, \quad s_4 = - 4 c_4,$$

ossia:

$$s_3 = - 12 a, \quad s_4 = - 4 b.$$

Calcoliamo le s_3, s_4 mediante le (8). Abbiamo:

$$s_3 = \frac{1}{64}[p_1^3 \sum_h i^{9h} + p_2^3 \sum_h i^{6h} + p_3^3 \sum_h i^{3h} + 3 p_2^2 p_3 \sum_h i^{5h}$$
$$+ 3 p_2 p_3^2 \sum_h i^{4h} + 3 p_3^2 p_1 \sum_h i^{5h} + 3 p_3 p_1^2 \sum_h i^{7h}$$
$$+ 3 p_1^2 p_2 \sum_h i^{8h} + 3 p_1 p_2^2 \sum_h i^{7h} + 6 p_1 p_2 p_3 \sum_h i^{6h}],$$

che, per le proprietà poc'anzi ricordate delle radici dell'unità, si riduce a:

$$s_3 = \frac{3}{16} p_2 (p_1^2 + p_3^2);$$

inoltre:

$$s_4 = \frac{1}{256}[p_1^4 \sum_h i^{12h} + p_2^4 \sum_h i^{8h} + p_3^4 \sum_h i^{4h} + 6 p_2^2 p_3^2 \sum_h i^{6h}$$
$$+ 6 p_3^2 p_1^2 \sum_h i^{8h} + 6 p_1^2 p_2^2 \sum_h i^{10h} + 4 p_2^3 p_3 \sum_h i^{7h}$$
$$+ 4 p_2 p_3^3 \sum_h i^{5h} + 4 p_3^3 p_1 \sum_h i^{6h} + 4 p_3 p_1^3 \sum_h i^{10h}$$
$$+ 4 p_1^3 p_2 \sum_h i^{11h} + 4 p_1 p_2^3 \sum_h i^{9h} + 12 p_1^2 p_2 p_3 \sum_h i^{9h}$$
$$+ 12 p_2^2 p_3 p_1 \sum_h i^{8h} + 12 p_3^2 p_1 p_2 \sum_h i^{7h}],$$

che si riduce a:

$$s_4 = \frac{1}{64}[p_1^4 + p_2^4 + p_3^4 + 6 p_1^2 p_3^2 + 12 p_1 p_2^2 p_3],$$

espressione che, in virtù della (9), diviene:

$$s_4 = \frac{1}{64}[p_1^4 - 14 p_1^2 p_3^2 + p_3^4].$$

Si ha dunque:

$$a = -\frac{1}{64} p_2 (p_1^2 + p_3^2), \quad b = -\frac{1}{256}(p_1^4 - 14 p_1^2 p_3^2 + p_3^4).$$

Ora segue dalla (10):

$$p_1 = -i p_3 z^2, \quad p_2 = -(1+i) p_3 z,$$

quindi le precedenti divengono:

$$(11)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{1+i}{64} p_3^3 z(z^4-1) = -\dfrac{1+i}{64} p_3^3 t(z, 1), \\ b = -\frac{1}{256} p_3^4 (z^8+14z^4+1) = -\frac{1}{256} p_3^4 W(z, 1). \end{cases}$$

Dividendo l'una per l'altra queste due relazioni, e introducendo poi il risultato ottenuto nelle espressioni di p_1, p_2, si trova:

$$p_1 = 4(1-i)\frac{b}{a}\frac{z^3(z^4-1)}{z^8+14z^4+1},$$

$$p_2 = -8i\frac{b}{a}\frac{z^2(z^4-1)}{z^8+14z^4+1},$$

$$p_3 = 4(1+i)\frac{b}{a}\frac{z(z^4-1)}{z^8+14z^4+1};$$

infine, sostituendo nelle (8), si ottengono le espressioni di x_1, x_2, x_3, x_4 mediante z:

$$(12)\quad \begin{cases} x_1 = [(1-i)z^2 - 2iz + (1+i)]\dfrac{b}{a}\dfrac{z(z^4-1)}{z^8+14z^4+1}, \\ x_2 = [-(1+i)z^2 + 2iz - (1-i)]\dfrac{b}{a}\dfrac{z(z^4-1)}{z^8+14z^4+1}, \\ x_3 = [-(1-i)z^2 - 2iz - (1+i)]\dfrac{b}{a}\dfrac{z(z^4-1)}{z^8+14z^4+1}, \\ x_4 = [(1+i)z^2 + 2iz + (1-i)]\dfrac{b}{a}\dfrac{z(z^4-1)}{z^8+14z^4+1}. \end{cases}$$

La z è una radice dell'equazione ottaedrica:

$$\frac{W^3(z, 1)}{108\, t^4(z, 1)} = Z,$$

la quale, per le (11), diviene:

$$\frac{W^3(z, 1)}{108\, t^4(z, 1)} = \frac{b^3}{27\, a^4}.$$

Risolta quest'equazione (art. 147), le (12) ci daranno le radici della (1).

155. Dobbiamo ora vedere come si passi da un'equazione generale di 4° grado ad un'equazione mancante del 2° e del 3° termine.

Noi possiamo supporre l'equazione già privata del 2° termine, cioè posta sotto la forma:

$$(1) \qquad y^4 + 6\, a\, y^2 + 4\, b\, y + c = 0.$$

Siano y_1, y_2, y_3, y_4 le radici di questa equazione, e s_1, s_2, ... le loro funzioni simmetriche complete.

Posto:

$$(2) \qquad x = y^2 + k\, y - \frac{s_2}{4},$$

dove k è una costante qualunque, l'eliminazione di y tra le (1), (2) darà luogo ad un'equazione di 4° grado in x, le cui radici saranno:

$$(3) \qquad x_h = y_h^2 + k\, y_h - \frac{s_2}{4} \quad (h = 1, 2, 3, 4).$$

Poichè $s_1 = 0$, dalle (3) risulta:

$$\sum_{h=1}^{4} x_h = s_2 + k\, s_1 - s_2 = 0;$$

inoltre:

$$\sum_{h=1}^{4} x_h^2 = s_4 + k^2 s_2 + \frac{s_2^2}{4} + 2\, k\, s_3 - \frac{s_2^2}{2} - \frac{k\, s_1\, s_2}{2}$$

$$= s_2\, k^2 + 2\, s_3\, k + \left(s_4 - \frac{s_2^2}{4}\right),$$

sicchè, se si vuole che l'equazione in x, oltre che

del secondo termine, sia priva anche del terzo, k dev'essere tale da soddisfare all'equazione:

$$(4) \qquad s_2 k^2 + 2 s_3 k + \left(s_4 - \frac{s_2^2}{4}\right) = 0.$$

Ora:

$$c_2 = 6a, \quad c_3 = -4b, \quad c_4 = c,$$

quindi, per le formole di NEWTON:

$$s_2 = -2c_2 = -12a, \quad s_3 = 3c_3 = -12b,$$
$$s_4 = -4c_4 + 2c_2^2 = -4c + 72a^2,$$

sicchè la (4) può scriversi:

$$k^2 + 2\frac{b}{a}k - \left(3a - \frac{c}{3a}\right) = 0.$$

Risolvendo si ha:

$$k = \frac{1}{a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - \frac{ac}{3} + 3a^3}\right],$$

e la (2) diviene:

$$x = y^2 + \frac{1}{a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - \frac{ac}{3} + 3a^3}\right]y + 3a,$$

sicchè le radici dell'equazione trasformata sono:

$$x_h = y_h^2 + \frac{1}{a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - \frac{ac}{3} + 3a^3}\right]y_h + 3a$$
$$(h = 1, 2, 3, 4).$$

Mediante questa espressione, e coll'uso delle formole di NEWTON *, si possono calcolare $\sum_{h=1}^{4} x_h^3$,

---

*) Queste formole ci dànno nel caso nostro:

$$s_5 = 120ab,$$
$$s_6 = 36ac + 48b^2 - 432a^3,$$
$$s_7 = 28bc - 1008a^2 b,$$
$$s_8 = 4c^2 - 288a^2 c - 768ab^2 + 2592a^4.$$

$\sum_{h=1}^{4} x_h^4$, e quindi i coefficienti dell'equazione trasformata.

Risolta poi l'equazione trasformata, cioè determinata x, l'Algebra ci insegna a dedurre per via razionale il valore di y dalle (1), (2).

156. Anche per le equazioni di 5° grado partiremo dalla forma *principale*:

$$x^5 + 5ax^2 + 5bx + c = 0, \tag{1}$$

riservando a più tardi il problema della riduzione dell'equazione generale a questa forma. Dette x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 le radici dell'equazione (1), esse soddisfanno alle due relazioni:

$$\sum_{h=1}^{5} x_h = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{h=1}^{5} x_h^2 = 0. \tag{3}$$

Noi possiamo individuare ciascun punto dello spazio mediante 5 coordinate omogenee x_h legate tra loro dalla relazione (2); tali coordinate diconsi *pentaedrali* *. Allora a ciascuna equazione (1) corrispondono 120 punti, potendosi le sue 5 radici prendere in tutte le 120 loro permutazioni possibili, e questi punti stanno tutti sulla superficie

* Come tali per es. possono prendersi le 4 coordinate omogenee relative ad un tetraedro fondamentale qualunque, e la loro somma presa negativamente.

avente per equazione la (3), superficie che, come è facile vedere, è una quadrica. Noi la chiameremo la *quadrica principale*. Ogni permutazione delle radici equivale ad una collineazione che trasforma la quadrica in sè stessa; così la permutazione $x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} x_{\alpha_3} x_{\alpha_4} x_{\alpha_5}$, dove i numeri α_h coincidono, a parte l'ordine, coi numeri 1, 2, 3, 4, 5, equivale alla collineazione:

(4) $x'_1 = x_{\alpha_1}, \quad x'_2 = x_{\alpha_2}, \quad x'_3 = x_{\alpha_3}, \quad x'_4 = x_{\alpha_4}, \quad x'_5 = x_{\alpha_5}.$

Vediamo come si comportino rispetto a queste collineazioni le generatrici rettilinee della quadrica. Anzitutto ogni generatrice si trasforma in una generatrice, giacchè una sostituzione lineare trasforma necessariamente ogni retta in una retta. Inoltre due generatrici g_1, g_2 appartenenti ad uno stesso sistema devono trasformarsi in due generatrici g'_1, g'_2 pure appartenenti ad uno stesso sistema, giacchè in caso diverso g'_1 e g'_2 si taglierebbero, mentre g_1 e g_2 non si tagliano; e così due generatrici appartenenti a sistemi diversi si trasformano in due generatrici appartenenti a sistemi diversi. Quindi per una collineazione sono possibili due soli casi: o essa trasforma ciascun sistema di generatrici in sè stesso, o scambia i due sistemi. Ora, se esiste una collineazione di questa seconda specie, ne esistono 60. Infatti sieno $C_1, C_2, \ldots, C_r$ le collineazioni della 1ª specie, $D_1, D_2, \ldots, D_s$ quelle della 2ª, essendo $r + s = 120$; i prodotti

$C_1 D_1$, $C_2 D_1$, ..., $C_r D_1$ rappresenteranno r collineazioni di 2ª specie tutte diverse, sicchè $s \geqq r$, e parimenti i prodotti $D_1 D_1$, $D_2 D_1$, ..., $D_s D_1$ rappresenteranno s collineazioni di 1ª specie tutte diverse, sicchè $r \geqq s$; donde si conclude $r = s = 60$. Non vi sono quindi che due casi possibili: o tutte le 120 collineazioni lasciano invariato ciascun sistema, o 60 di esse hanno questa proprietà. Nel secondo caso, le 60 collineazioni sono necessariamente quelle corrispondenti alle 60 permutazioni pari delle 5 coordinate; esse quindi formano (art. 67) un gruppo oloedricamente isomorfo al gruppo icosaedrico.

Per decidere quale dei due casi abbia luogo, osserviamo che l'equazione d'una quadrica si può, come è noto, ridurre con una òpportuna sostituzione lineare alla forma:

$$p_1 p_4 + p_2 p_3 = 0,$$

dove le p_h sono coordinate tetraedrali. L'equazione può scriversi anche:

$$\frac{p_1}{p_2} = -\frac{p_3}{p_4} = \lambda, \quad \frac{p_1}{p_3} = -\frac{p_2}{p_4} = \mu,$$

e λ, μ sono i parametri delle generatrici dei due sistemi. Poichè dunque λ, μ sono funzioni lineari delle coordinate p_h, e per conseguenza anche delle coordinate x_h, per ogni trasformazione lineare delle coordinate x_h che muti ogni sistema di generatrici in sè stesso tanto λ che μ subiranno una sostitu-

zione lineare. Veniamo così ad ottenere un gruppo G di sostituzioni lineari della λ che è oloedricamente isomorfo al gruppo delle collineazioni che mutano in sè stesso ciascun sistema di generatrici.

Il gruppo G pertanto, o è di 60° ordine, ed allora è icosaedrico, od è di 120° ordine, ed allora contiene un sottogruppo icosaedrico. Ma quest'ultimo caso è impossibile, giacchè (v. art. 37) i soli gruppi possibili di sostituzioni lineari di 120° ordine sono ciclici o diedrici, e questi non possono contenere un sottogruppo icosaedrico. Possiamo dunque concludere: *Delle* 120 *collineazioni* (4) *sole* 60 *mutano in sè stesso ciascun sistema di generatrici; le corrispondenti sostituzioni lineari del parametro delle generatrici dell'uno o dell'altro sistema formano un gruppo icosaedrico.*

Noi abbiamo già stabilito nei suoi particolari l'isomorfismo tra il gruppo delle 60 permutazioni pari di 5 elementi e il gruppo icosaedrico (art. 67); abbiamo visto allora, che alle sostituzioni S, T di questo gruppo corrispondono rispettivamente le permutazioni (2 3 4 5 1), (1 3 2 5 4). Cerchiamo dunque di costruire una funzione lineare z delle x_h, che subisca le sostituzioni S, T quando le x_h vengono permutate nei modi anzidetti. Posto:

$$z = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5},$$

e ricordando che le espressioni analitiche delle S, T sono rispettivamente:

$$z' = \varepsilon z, \quad z' = \frac{\sigma z + \tau}{\tau z - \sigma},$$

dove le ε, σ, τ hanno il significato loro già attribuito (art. 68), vediamo che dev'essere:

$$(5)\left\{\begin{aligned} & \frac{a_1 x_1 + a_2 x_3 + a_3 x_4 + a_4 x_5 + a_5 x_1}{b_1 x_1 + b_2 x_3 + b_3 x_4 + b_4 x_5 + b_5 x_1} \\ = \varepsilon & \frac{a_2 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5}, \\ & \frac{a_1 x_1 + a_2 x_3 + a_3 x_2 + a_4 x_5 + a_5 x_4}{b_1 x_1 + b_2 x_3 + b_3 x_2 + b_4 x_5 + b_5 x_4} \\ = & \frac{(\sigma a_1 + \tau b_1) x_1 + \cdots + (\sigma a_5 + \tau b_5)}{(\tau a_1 - \sigma b_1) x_1 + \cdots + (\tau a_5 - \sigma b_5)}. \end{aligned}\right.$$

Perchè la prima equazione (5) sia soddisfatta indipendentemente dalle relazioni (2), (3) esistenti fra le x_k, dev'essere:

$$\frac{a_5}{\varepsilon a_1} = \frac{a_1}{\varepsilon a_2} = \frac{a_2}{\varepsilon a_3} = \frac{a_3}{\varepsilon a_4} = \frac{a_4}{\varepsilon a_5}$$

$$= \frac{b_5}{b_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{b_3}{b_4} = \frac{b_4}{b_5}.$$

Indicando con δ il valore comune di questi rapporti, si trova:

$$\delta^5 = 1,$$

$$a_2 = \varepsilon^4 \delta^4 a_1, \quad a_3 = \varepsilon^3 \delta^3 a_1, \quad a_4 = \varepsilon^2 \delta^2 a_1, \quad a_5 = \varepsilon\delta\, a_1;$$
$$b_2 = \delta^4 b_1, \quad b_3 = \delta^3 b_1, \quad b_4 = \delta^2 b_1, \quad b_5 = \delta b_1,$$

sicchè, posto $\frac{a_1}{b_1} = c$, dove c è da determinarsi, può farsi:

$$a_1 = c,\quad a_2 = \varepsilon^4\delta^4 c,\quad a_3 = \varepsilon^3\delta^3 c,\quad a_4 = \varepsilon^2\delta^2 c,\quad a_5 = \varepsilon\delta c,$$
$$b_1 = 1,\quad b_2 = \delta^4,\quad b_3 = \delta^3,\quad b_4 = \delta^2,\quad b_5 = \delta,$$

e l'espressione di z diviene:

$$z = c\,\frac{x_1 + \varepsilon^4\delta^4 x_2 + \varepsilon^3\delta^3 x_3 + \varepsilon^2\delta^2 x_4 + \varepsilon\delta x_5}{x_1 + \delta^4 x_2 + \delta^3 x_3 + \delta^2 x_4 + \delta x_5},$$

od anche, ponendo $\delta = \varepsilon^{4(h+1)}$, ciò che è sempre lecito:

$$z = c\,\frac{x_1 + \varepsilon^h x_2 + \varepsilon^{2h} x_3 + \varepsilon^{3h} x_4 + \varepsilon^{4h} x_5}{x_1 + \varepsilon^{h+1} x_2 + \varepsilon^{2(h+1)} x_3 + \varepsilon^{3(h+1)} x_4 + \varepsilon^{4(h+1)} x_5}.$$

È chiaro poi che, qualunque sia h, z soddisfa sempre alla condizione voluta.

Poniamo:

$$(6)\qquad p_h = x_1 + \varepsilon^h x_2 + \varepsilon^{2h} x_3 + \varepsilon^{3h} x_4 + \varepsilon^{4h} x_5 \quad (h = 1, 2, 3, 4),$$

sicchè:

$$(7)\qquad z = c\,\frac{p_h}{p_{h+1}}.$$

Le p_h possono considerarsi come coordinate omogenee dei punti dello spazio; le espressioni delle x_h mediante esse si ottengono combinando le (6) colla (2). Si trova così:

$$x_1 = \frac{1}{5}[p_1 + p_2 + p_3 + p_4],$$
$$x_2 = \frac{1}{5}[\varepsilon^4 p_1 + \varepsilon^8 p_2 + \varepsilon^{12} p_3 + \varepsilon^{16} p_4],$$
$$x_3 = \frac{1}{5}[\varepsilon^3 p_1 + \varepsilon^6 p_2 + \varepsilon^9 p_3 + \varepsilon^{12} p_4],$$
$$x_4 = \frac{1}{5}[\varepsilon^2 p_1 + \varepsilon^4 p_2 + \varepsilon^6 p_3 + \varepsilon^8 p_4],$$
$$x_5 = \frac{1}{5}[\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \varepsilon^4 p_4],$$

e la (3) diviene:

$$p_1 p_4 + p_2 p_3 = 0,$$

sicchè, se nella (7) facciamo $h = 1$, abbiamo:

$$z = c\frac{p_1}{p_2} = -c\frac{p_3}{p_4}, \tag{8}$$

e la z può considerarsi come il parametro delle generatrici di uno dei due sistemi rettilinei.

Resta da determinarsi c, in modo che sia soddisfatta la seconda delle (5). Introducendovi l'espressione (8) di z, e scrivendo la condizione perchè essa sia soddisfatta tenuto conto delle (2), (3), si ha:

$$\begin{aligned} c(x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon x_3+\varepsilon^4 x_4+\varepsilon^3 x_5)[(c\tau-\sigma)x_1+(c\varepsilon\tau-\varepsilon^2\sigma)x_2 \\ +(c\varepsilon^2\tau-\varepsilon^4\sigma)x_3+(c\varepsilon^3\tau-\varepsilon^6\sigma)x_4+(c\varepsilon^4\tau-\varepsilon^8\sigma)x_5] \\ -(x_1+\varepsilon^4 x_2+\varepsilon^2 x_3+\varepsilon^8 x_4+\varepsilon^6 x_5)[(c\sigma+\tau)x_1 \\ +(c\varepsilon\sigma+\varepsilon^2\tau)x_2+(c\varepsilon^2\sigma+\varepsilon^4\tau)x_3+(c\varepsilon^3\sigma+\varepsilon^6\tau)x_4 \\ +(c\varepsilon^4\sigma+\varepsilon^8\tau)x_5]+h(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \\ +k(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2)=0, \end{aligned}$$

dove h, k sono due costanti da determinarsi. Scriviamo questa relazione brevemente così:

$$\sum_{i,j} a_{ij}\, x_i\, x_j = 0,$$

dove:

$$\begin{aligned} a_{11} &= c^2\tau - 2c\sigma - \tau + h + k, \\ a_{22} = a_{33} &= c^2\varepsilon^3\tau - c(1+\varepsilon^4)\sigma - \varepsilon\tau + h + k, \\ a_{44} = a_{55} &= c^2\varepsilon^2\tau - c(1+\varepsilon)\sigma - \varepsilon^4\tau + h + k, \\ a_{12} = a_{13} &= c^2(\varepsilon+\varepsilon^2)\tau - c(\varepsilon+2\varepsilon^2+\varepsilon^4)\sigma - (\varepsilon^2+\varepsilon^4)\tau + 2h, \\ a_{14} = a_{15} &= c^2(\varepsilon^3+\varepsilon^4)\tau - c(\varepsilon+2\varepsilon^3+\varepsilon^4)\sigma - (\varepsilon+\varepsilon^3)\tau + 2h, \\ a_{23} &= c^2(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\tau - 2c(\varepsilon+\varepsilon^3)\sigma - (\varepsilon^3+\varepsilon^4)\tau + 2h, \end{aligned}$$

$$a_{24} = a_{35} = 2c^2\tau + c\sigma - 2\tau + 2h,$$
$$a_{25} = a_{34} = c^2(\varepsilon+\varepsilon^4)\tau - c(2+\varepsilon^2+\varepsilon^3)\sigma - (\varepsilon^2+\varepsilon^3)\tau + 2h,$$
$$a_{45} = c^2(\varepsilon + \varepsilon^3)\tau - 2c(\varepsilon^2 + \varepsilon^4)\sigma - (\varepsilon + \varepsilon^2)\tau + 2h.$$

Questi coefficienti devono essere tutti nulli. Di qui si ha, ricordando le espressioni di σ e di τ:

$$\begin{aligned} 0 = a_{44} - a_{22} &= c^2(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\tau - c(\varepsilon - \varepsilon^4)\sigma \\ &+ (\varepsilon - \varepsilon^4)\tau = c^2\tau^2 - c\sigma^2 + \sigma\tau, \\ 0 = a_{45} - a_{23} &= c^2(\varepsilon - \varepsilon^4 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)\tau \\ &- 2c(\varepsilon^2 - \varepsilon^3 - \varepsilon + \varepsilon^4)\sigma - (\varepsilon - \varepsilon^4 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)\tau \\ &= c^2(\sigma - \tau)\tau - 2c(\tau - \sigma)\sigma - (\sigma + \tau)\tau. \end{aligned}$$

Eliminando c^2 fra queste due equazioni, si ottiene:

$$c = \frac{\tau(\sigma^2 + \tau^2)}{\sigma^3 + \sigma^2\tau - 2\sigma\tau^2}.$$

Ora, poichè (art. 68):

$$\sigma^2 - \tau^2 = \sigma\tau,$$

si ha:

$$\begin{aligned} \sigma^3 + \sigma^2\tau - 2\sigma\tau^2 &= \sigma(\sigma\tau + \tau^2) + \sigma^2\tau - 2\sigma\tau^2 \\ &= \tau(2\sigma^2 - \sigma\tau) = \tau(\sigma^2 + \tau^2), \end{aligned}$$

quindi $c = 1$; ed è facile verificare che questo valore di c soddisfa a tutte le equazioni che si ottengono eliminando h e k fra le $a_{ij} = 0$.

Pertanto l'espressione cercata di χ è:

$$\chi = \frac{p_1}{p_2} = -\frac{p_3}{p_4}.$$

Dimostreremo ora, che, se l'equazione data è la risolvente principale d'una equazione icosaedrica, la funzione χ testè costruita non è altro che la variabile χ che figura in quest'ultima equazione.

Rammentiamo che le radici della risolvente principale sono (art. 149):

$$Y_h = a W_h + b t_h W_h \quad (h = 0, 1, 2, 3, 4);$$

ed osserviamo che può scriversi:

$$W_h = (\varepsilon^{4h} z_1 + \varepsilon^{3h} z_2)(- z_1^7 - 7 z_1^2 z_2^5) + (\varepsilon^{2h} z_1 - \varepsilon^h z_2)(- 7 z_1^5 z_2^2 + z_2^7),$$

$$t_h W_h = (\varepsilon^{4h} z_1 + \varepsilon^{3h} z_2)(26 z_1^{10} z_2^3 + 39 z_1^5 z_2^8 - z_2^{13}) + (\varepsilon^{2h} z_1 - \varepsilon^h z_2)(- z_1^{13} - 39 z_1^8 z_2^5 + 26 z_1^3 z_2^{10}).$$

Ponendo quindi:

$$a(-z_1^7 - 7z_1^2z_2^5) + b(26z_1^{10}z_2^3 + 39z_1^5z_2^8 - z_2^{13}) \quad = R,$$
$$a(-7z_1^5z_2^2 + z_2^7) + b(-z_1^{13} - 39z_1^8z_2^5 + 26z_1^3z_2^{10}) = S,$$

espressioni che sono indipendenti dall'indice h, si ha:

$$Y_h = R(\varepsilon^{4h} z_1 + \varepsilon^{3h} z_2) + S(\varepsilon^{2h} z_1 - \varepsilon^h z_2).$$

Ne segue:

$$p_1 = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \varepsilon^3 Y_3 + \varepsilon^4 Y_4$$
$$= \sum_{h=0}^{4} [R(z_1 + \varepsilon^{4h} z_2) + S(\varepsilon^{3h} z_1 - \varepsilon^{2h} z_2)] = 5 R z_1,$$

$$p_2 = Y_0 + \varepsilon^2 Y_1 + \varepsilon^4 Y_2 + \varepsilon^6 Y_3 + \varepsilon^8 Y_4$$
$$= \sum_{h=0}^{4} [R(\varepsilon^h z_1 + z_2) + S(\varepsilon^{4h} z_1 - \varepsilon^{3h} z_2)] = 5 R z_2,$$

$$p_3 = Y_0 + \varepsilon^3 Y_1 + \varepsilon^6 Y_2 + \varepsilon^9 Y_3 + \varepsilon^{12} Y_4$$
$$= \sum_{h=0}^{4} [R(\varepsilon^{2h} z_1 + \varepsilon^h z_2) + S(z_1 - \varepsilon^{4h} z_2)] = 5 S z_1,$$

$$p_4 = Y_0 + \varepsilon^4 Y_1 + \varepsilon^8 Y_2 + \varepsilon^{12} Y_3 + \varepsilon^{16} Y_4$$
$$= \sum_{h=0}^{4} [R(\varepsilon^{3h} z_1 + \varepsilon^{2h} z_2) + S(\varepsilon^h z_1 - z_2)] = -5 S z_2,$$

e di qui:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{p_3}{p_4} = -\frac{z_1}{z_2},$$

ossia:

$$z = \frac{p_1}{p_2} = -\frac{p_3}{p_4}.$$

Data pertanto un'equazione principale del 5° grado, se noi riusciremo a costruire l'equazione icosaedrica di cui essa è la risolvente principale, la risoluzione di tale equazione ci farà conoscere immediatamente le radici della equazione data. Ciò dipende dalla circostanza che, essendo la risolvente principale dell'equazione icosaedrica (come ogni altra risolvente di essa) una risolvente equivalente, l'equazione icosaedrica può a sua volta considerarsi come una risolvente della propria risolvente.

Sia data dunque l'equazione:

$$x^5 + 5ax^2 + 5bx + c = 0.$$

Se noi potremo determinare le tre quantità m, n, Z in modo da identificare questa equazione colla (art. 149):

$$x^5 - \frac{5}{Z}\left(8m^3 + 12m^2n + \frac{6mn^2 + n^3}{1-Z}\right)x^2$$

$$+\frac{15}{Z}\left(-4m^4 + \frac{6m^2n^2 + 4mn^3}{1-Z} + \frac{3}{4}\frac{n^4}{(1-Z)^2}\right)x$$

$$-\frac{3}{Z}\left(48m^5 - \frac{40m^3n^2}{1-Z} + \frac{15mn^4 + 4n^5}{(1-Z)^2}\right) = 0,$$

indicando con z una radice dell'equazione icosaedrica:

$$-\frac{H^3(z, 1)}{1728 f^5(z, 1)} = Z,$$

le espressioni:

$$x_h = m\, v_h(z) + n\, u_h(z) v_h(z) \quad (h = 0, 1, 2, 3, 4),$$

dove:

$$u_h(z) = \frac{12 f^2(z, 1)}{T(z, 1)} t_h(z, 1), \quad v_h(z) = \frac{12 f(z, 1)}{H(z, 1)} W_h(z, 1),$$

ci daranno le 5 radici dell'equazione proposta.

Si tratta pertanto di risolvere rispetto ad m, n, Z il sistema d'equazioni:

$$(1) \quad a = -\frac{1}{Z}\left(8 m^3 + 12 m^2 n + \frac{6 m n^2 + n^3}{1 - Z}\right),$$

$$(2) \quad b = \frac{3}{Z}\left[-4 m^4 + \frac{6 m^2 n^2 + 4 m n^3}{1 - Z} + \frac{3}{4} \frac{n^4}{(1 - Z)^2}\right],$$

$$(3) \quad c = -\frac{3}{Z}\left[48 m^5 - \frac{40 m^3 n^2}{1 - Z} + \frac{15 m n^4 + 4 n^5}{(1 - Z)^2}\right].$$

Dalle (1), (2), (3) segue:

$$\frac{12 n^2}{1 - Z} a + 12 m b - c = 0,$$

ossia:

$$(4) \quad \frac{n^2}{1 - Z} = \frac{-12 m b + c}{12 a};$$

inoltre:

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\frac{n^2}{1-Z}b+mc\\&=\frac{9}{4Z}\left[-64m^6+\frac{48m^4n^2}{1-Z}-\frac{12m^2n^4}{(1-Z)^2}+\frac{n^6}{(1-Z)^3}\right]\\&=-\frac{9}{4Z}\left[4m^2-\frac{n^2}{1-Z}\right]^3,\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad -3ma+2b=\frac{9n}{2Z}\left[8m^3+\frac{12m^2n+6mn^2}{1-Z}+\frac{n^3}{(1-Z)^2}\right].$$

Dalle (1), (6) risulta:

$$a^2-\frac{4}{81}\frac{1-Z}{n^2}(-3ma+2b)^2$$

$$=\frac{1}{Z}\left[64m^6-\frac{48m^4n^2}{1-Z}+\frac{12m^2n^4}{(1-Z)^2}-\frac{n^6}{(1-Z)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{Z}\left[4m^2-\frac{n^2}{1-Z}\right]^3;$$

confrontando colla (5) si ha:

$$\frac{n^2}{1-Z}b+mc=-\frac{9}{4}\left[a^2-\frac{4}{81}\frac{1-Z}{n^2}(-3ma+2b)^2\right],$$

ossia, moltiplicando per $\frac{n^2}{1-Z}$ e portando tutti i termini al primo membro:

$$\frac{n^2}{1-Z}\left[\frac{9}{4}a^2+\frac{n^2}{1-Z}b+mc\right]-\frac{1}{9}[-3ma+2b]^2=0,$$

ed infine per la (4):

$$\frac{-12mb+c}{12a}\left[\frac{9}{4}a^2+\frac{(-12mb+c)b}{12a}+mc\right]$$

$$-\frac{1}{9}[-3ma+2b]^2=0.$$

Quest'equazione contiene la sola incognita m, ed è rispetto ad essa di 2° grado; ordinandola, essa diviene:

$$144\,m^2(b^3-a^4-abc)-12\,m(2\,b^2c+11\,a^3b-ac^2) + (bc^2+27\,a^3c-64\,a^2b^2)=0,$$

donde:

$$(7)\qquad m=\frac{2\,b^2c+11\,a^3b-ac^2\pm a\nabla}{24(b^3-a^4-abc)},$$

essendo:

$$\nabla^2=108a^5c-135a^4b^2+90a^2bc^2-320ab^3c+256\,b^5+c^4.$$

L'espressione ∇^2 è, a meno del fattore 5^5, il discriminante dell'equazione data (v. art. 149).

Segue poi dalle (4), (5):

$$\frac{(-12mb+c)b}{12\,a}+mc=-\frac{9}{4Z}\left[4m^2+\frac{12mb-c}{12a}\right]^3,$$

da cui:

$$(8)\qquad Z=-\frac{[48\,am^2+12\,bm-c]^3}{64a^2[-12(b^2-ac)m+bc]},$$

dove per m si deve porre la sua espressione data dalla (7). Infine dalle (1), (4) segue:

$$-aZ=8\,m^3+12\,m^2n+\frac{n^2}{1-Z}(6\,m+n)$$

$$=8\,m^3+12\,m^2n+\frac{(6\,m+n)(-12\,bm+c)}{12\,a},$$

e risolvendo rispetto ad n:

$$(9)\ n=\frac{-96\,am^3+72\,bm^2-6\,cm-12\,a^2Z}{144\,am^2-12\,bm+c},$$

dove per m, Z devono intendersi poste le loro espressioni (7), (8).

Le (7), (8), (9) risolvono il problema propostoci. L'ambiguità del segno corrisponde al fatto che esistono due sistemi di generatrici rettilinee della quadrica principale.

157. Vediamo finalmente come un'equazione qualunque di 5° grado si riduce ad un' equazione principale.

Sieno y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 le radici della data equazione, che supporremo mancante del secondo termine, sicchè, indicando con $s_1, s_2, \ldots$ le funzioni simmetriche complete delle y_h, si ha $s_1 = 0$. Poniamo:

$$y_{kh} = y_h^k - \frac{s_k}{5} \qquad (h = 1, 2, 3, 4, 5;\; k = 1, 2, 3, 4);$$

sarà:

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{5} y_{kh} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

quindi i sistemi di valori:

$$y_{k1}, y_{k2}, y_{k3}, y_{k4}, y_{k5} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

si potranno considerare come le coordinate pentaedrali di 4 punti dello spazio. Se prendiamo questi 4 punti come vertici del tetraedro fondamentale, e se p, q, r, s sono le coordinate rispetto a questo tetraedro di un punto dello spazio, le coordinate pentaedrali di questo punto saranno:

$$(2) \quad x_h = p\,y_{1h} + q\,y_{2h} + r\,y_{3h} + s\,y_{4h} \quad (h = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Esse, come risulta dalle (1), verificano l'equazione fondamentale $\sum_{h=1}^{5} x_h = 0$; se noi riusciremo a

determinare le p, q, r, s in modo che abbia luogo anche la:

$$(3) \qquad \sum_{h=1}^{5} x_h^2 = 0,$$

la trasformazione:

$$(4) \quad x = py + q\left(y^2 - \frac{s_2}{5}\right) + r\left(y^3 - \frac{s^3}{5}\right) + s\left(y^4 - \frac{s_4}{5}\right)$$

muterà l'equazione data in un'equazione principale.

La determinazione delle p, q, r, s sotto la condizione indicata può farsi in infiniti modi. Introducendo infatti le espressioni (2) nella (3), si ottiene un'equazione omogenea di 2° grado rispetto a p, q, r, s:

$$(5) \quad p^2 \sum_{h=1}^{5} y_{1h}^2 + q^2 \sum_{h=1}^{5} y_{2h}^2 + \cdots + 2pq \sum_{h=1}^{5} y_{1h} y_{2h} + \cdots = 0,$$

i cui coefficienti sono funzioni razionali dei coefficienti dell'equazione proposta, e, fissati a piacere i valori di tre di queste quantità, la quarta viene determinata da un'equazione di 2° grado. Geometricamente la (5) è l'equazione della quadrica principale, e il nostro problema si riduce alla determinazione di un punto qualunque di essa. Noi possiamo dunque procedere così: prendiamo a piacere due punti conosciuti dello spazio, (p_1, q_1, r_1, s_1), (p_2, q_2, r_2, s_2); ogni punto della loro congiungente avrà le coordinate:

$$(6) \quad \begin{cases} p = \rho_1 p_1 + \rho_2 p_2, & q = \rho_1 q_1 + \rho_2 q_2, \\ r = \rho_1 r_1 + \rho_2 r_2, & s = \rho_1 s_1 + \rho_2 s_2, \end{cases}$$

dove ρ_1, ρ_2 sono coefficienti indeterminati. Introduciamo queste espressioni nella (5); essa si trasformerà in un'equazione di secondo grado rispetto a $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, e i valori di ρ_1 e ρ_2 corrispondenti ad una od all'altra delle sue radici, introdotti nelle (6), ci daranno un sistema di valori p, q, r, s che soddisfa alla condizione voluta.

Risolta poi l'equazione principale, cioè determinati i 5 valori di x, la teoria dell'eliminazione ci darà il modo di trovare per via razionale, mediante le equazioni (1) e (4), i 5 valori corrispondenti di y.

INDICE ALFABETICO.

R

S

T

in-8 grande) si trovano elencati nelle pagine dell'appendice (carta colorata) unita al presente Catalogo.

IV. — *I Manuali Hoepli formano un'Enciclopedia perennemente viva di scienze, lettere ed arti, perchè la loro grande diffusione permette all'editore di rinnovarli e rifarli di continuo.*

Ulrico Hoepli

AVVERTENZE

☛ I libri si spediscono *franchi di porto* nel Regno e nelle Colonie italiane dietro invio dell'importo a mezzo di cartolina vaglia. — Per le spedizioni all'estero aggiungere il *dieci per cento in più* sul prezzo del libro.

☛ Le spedizioni sono fatte con cura e puntualità, ma i volumi non raccomandati viaggiano a *rischio* e *pericolo* del committente.

Per ricevere i libri raccomandati — **onde evitare smarrimenti dei quali l'editore non si rende responsabile** — aggiungere *centesimi 30 in più.*

☛ Si fanno anche spedizioni contro assegno (eccettuato in zona di guerra ove tali spedizioni non sono ammesse), ma siccome le spese di assegno sono ingenti, è meglio *inviare sempre* l'importo anticipato con cartolina vaglia.

I manuali Hoepli non esistono in brochure; essi sono tutti solidamente ed elegantemente legati

ELENCO COMPLETO DEI MANUALI HOEPLI

disposti in ordine alfabetico per materia

L. C.

Abbreviature latine ed italiane (Dizionario di) usato specialmente nel medio evo, di A. CAPPELLI, 2ª ediz., di pag. LXVIII-528 (legato in tutta pergamena) 18 50

Abitazioni animali domestici di U. BARPI, 2ª ediz. p. XVI-479 e 255 figure 5 50

Abitazioni popolari (Case operaie) di E. MAGRINI, 2ª ediz. pag. XVI 465 e 219 incisioni 5 50

Abiti per signora. Taglio e confezione di E. BONETTI pag. XX-296, 55 tavole (in ristampa)

Acciai (Lavor. e tempera degli). Indurimento superficiale del ferro e cementazione, di A. MASSENZ, 3ª ediz. riveduta, pag. XX-184 con 60 inc. 2 50

Acciai (Tecnica moderna degli), di C. GOFFI. Produzione, lavoraz. a caldo, trattamenti termici, lavoraz. a freddo, proprietà, impiego degli acciai al carbonio e speciali. Manuale per gli operai aggiustatori meccanici pag. XVI-260 con 88 inc. e 3 tav. a colori. 5 50

Acciaio (Tempera e cementaz. dell'), di M. LEVI-MALVANO, di pag. XII-261 . . . . 5 —

Accumulatori — vedi: Correnti alternate - Illuminazione elettrica - Ingegnere elettricista - Operaio elettrotecnico - Sovratensioni - Ricettario del elettricista.

Acetilene (L') e le sue applicazioni di S. CASTELLANI e U. ROMANELLI, 3ª ediz. di pag. XX-335 e 115 illustr. . 4 —

Acido solforico, nitrico, muriatico, ecc. (Fabbricaz dell') di V. VENDER, (in ristampa).

Acquaforte (L') di F. MELIS-MARINI, di pag. 178, con 10 tav. e 15 prove originali 4 50

Acqua potabile (Condottura di), di P. BRESADOLA, di p. XVI-334 e 37 fig. (in ristampa).

Acque minerali e termali d'Italia di L. TIOLI, di pag. XXII-552 . . . . 5 50

Acque minerali artificiali, acque gazose, ecc., di M. GIUA, con 42 illustrazioni. . . . . . . 2 —

Acque sotterranee e giacimenti minerali, di M. GROSSI di pag. XVI-380 con 68 incis. e una tavola 4 50

Acque sotterranee — vedi: Petrolio.

Acrobatica e atletica di A. ZUCCA, di pag. XXX-267, 100 tav. e 42 inc. . . . . 5 —

L. c.

Acustica musicale, di A. TACCHINARDI, di p. XII-188, con 85 inc. 3 50

Adulterazioni del vino e dell'aceto di A. ALOI, di pag. XII-227 e 10 incis. (esaurito).

Aerostatica, Aeronautica, Aviazione di G. G. BASSOLI, p. VIII-184 e 94 incis. (esaurito).

Affari (Vademecum dell'uomo di), di C. DOMPÈ, 2ª ediz. di pag. 562 . . . . 8 50

Aggiustatore meccanico, di F. MASSERO, di pag. XII-263 con 296 inc. (in ristampa).

— Vedi Acciai.

Agraria — vedi: Abitazioni animali - Agricoltore - Agronomia - Alimentazione del bestiame - Ampelografia - Catasto italiano - Computisteria agraria - Economia fabbricati rurali - Estimo rurale - Geometria pratica - Legislazione rurale - Macchine agricole - Mezzeria - Pomologia - Telemetria - Triangolazioni topografiche e catastali.

Agricoltore (Prontuario dell') e dell'Ingegnere agronomo, di V. NICCOLI, 6ª ediz., p. XL-588 (in ristampa)

Agricoltore (Il libro dell'). Agronomia agricoltura, di A. BRUTTINI. 4ª ediz., di p. 557, con 319 inc. . . 10 —

Agrimensura (Elementi di) di S. FERRERI-MITOLDI, 2ª edizione, di pag. XVIII-324, con 240 incisioni . . 4 50

Agronomia di CAREGA DI MURICCE, 3ª ed. (esaurito).

Agronomia e agricoltura moderna di G. SOLDANI, 3ª ediz., di p. VIII-416 (in ristampa).

Agricoltura — vedi: Botanica - Chimica agraria - Coltivazione piante tessili - Coltura montana - Concimi - Elettricità (L') nella vegetazione - Floricoltura - Frumento e mais - Frutta minori - Frutticoltura - Funghi e tartufi - Gelsicoltura - Giardiniere - Insetti nocivi - Insetti utili - Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate - Molini - Olivo ed olio - Olii vegetali, animali e minerali - Orticoltura - Piante e fiori - Piante industriali - Pomologia artificiale - Prato - Prodotti agricoli del Tropico - Selvicoltura - Tabacco - Uva passa - Viticoltura.

Agrumicoltura in Italia (L') **e nella Libia,** di E. FERRARI, di pag. XIV-228, con 35 tavole . . . 8 50

Albanese parlato. Cenni grammaticali e vocabolario, proverbi, dialoghi, di A. LEOTTI, di p. 433 . . 4 50

Alcool. Fabbricazione e materie prime, di F. CANTAMESSA, 2ª ediz., di p. XII-447 . . . . 5 —

Alcool industriale, di G. CIAPETTI. Produzione e applicazione, p. XII-262 e 105 figure . . . . 4 —

Alcoolismo (L') di G. ALLEVI, di p. XI-221 . . . 3 —

Algebra complementare di S. PINCHERLE, 2 vol.
- I. **Analisi algebrica,** 3ª ediz. di p. VIII-174 con 8 inc. 1 50
- II. **Teoria delle equazioni,** 3ª ediz., p. IV-167 e 4 inc. 1 50

Algebra elementare di S. PINCHERLE, 13ª ediz. di p. VIII-210 . . . . 3 —

— (Esercizi di) di S. PINCHERLE, 2ª ediz., p. VIII-135 . . 1 50

Alimentazione di G. STRAFFORELLO, di p. VIII-122 . 2 —

Alimentazione del bestiame di MENOZZI e NICCOLI 2ª ediz. p. XVI-407 . . . . 5 —

L. C.

Alligazione (Tavole di) per l'oro e l'argento di F. BUTTARI, p. XII-220 . . . . 2 50
Alluminio (L') di C FORMENTI, di p. XXVIII-324 . . 4 50
Alpi (Le) di I. BALL, traduz. di I. Cremona, p. VI-120 1 —
Alpinismo di G. BROCHEREL, di p. VIII-312 . . 3 —
Amatore (L') di oggetti d'arte e di curiosità di L. DE MAURI, 2ª ediz., di p. XV-720, (in ristampa).
Amatore (L') di majoliche e porcellane di L. DE MAURI 2ª ediz. di pag. XVI 843 con 430 incisioni e 43 tavole . 15 —
Amatore (L') di miniature in avorio. (Secoli 17, 18, 19). di p. 560, con 22 illustrazioni nel testo e 62 fuori testo delle quali 23 a colori . . . 18 50
Amministrazioni comunali, provinciali e opere pie, pei Segretari e aspiranti Segretari comunali di E. MARIANI, di p. XXXII-979, legato in pelle. 9 50
Ampelografia. Viti per uve da vino e da tavola, di G. MOLON, p. XLIV-1243, 2 vol. . . . . 22 —
Analisi chimica qualitativa di sostanze minerali e organiche, di P. E. ALESSANDRI, 3ª ediz. rifatta di pag. XVI-470 con 55 incis. e 63 tavole. 8 —
Analisi chimica qualitativa (Tabelle di) di F. P. TREADWELL. Ediz. ital. con un compendio di ricerche sulla purezza dei reattivi ed un cenno sulle soluzioni titolate, per cura di G. PANIZZON, di pag. VII-238 . . 5 50
Analisi chimica quantitativa ponderale e volumetrica, di P. E. ALESSANDRI. 2ª edizione, di pag. XX-262 con 73 incisioni. . . . . . . 8 —
Analisi chimiche per Ingegneri di L. MEDRI, di p. XIV-313 e 80 figure (in ristampa).
Analisi delle urine (L'urina nella diagnosi delle malattie), di F. JORIO (in ristampa).
— vedi - Urologia.
Analisi del vino, di M. BARTH e E. COMBONI, 2ª ed., di p. XVI-140 . . . . 2 —
Anatomia e fisiologia comparate di R. BESTA, p. VII-229 e 59 incis. (in ristampa).
Anatomia microscopica, di D. CARAZZI, di p. XI-211, con 5 incis. 1 50
Anatomia pittorica, di A. LOMBARDINI, 5ª ediz. a cura di V. LOMBARDINI, di pag. 207, con 56 figure . 4 50
Anatomia topografica di C. FALCONE, 3ª ediz., di pag. XII-887 e 48 figure (in ristampa).
Anatomia vegetale di A. TOGNINI, di p. XVI-724 . 3 —
Anfibi d'Italia (Gli), di C. VANDONI, di pag. XII-176, con 32 figure 2 50
Animali da cortile. Polli, Tacchini, Fagiani, Oche, Conigli, ecc., di F. FAELLI, 2ª ediz., di pag. XXIV-388, con 56 incisioni e 19 tavole colorate . . . . . . 7 —
— — vedi: Colombi domestici - Coniglicoltura - Fagiani - Malattie dei polli - Pollicoltura - Uccelli canori.
Animali domestici. — vedi: Abitazione degli - Cammello - Cane - Cani e gatti - Cavallo - Maiale - Porco - Razze bovine - Suinicoltura - Zebra.
Animali parassiti dell'uomo di F. MERCANTI, di p. IV-179, con 33 incis. 1 50
— Vedi: Insetti delle case.

L. c

Antichità greche, pubbliche, sacre e private, di V. INAMA, 2ª ediz. di p. XV-224 e 19 tav. . 2 50

Antichità private dei romani, di N. MORESCHI e W. KOPP, di p. XVI-181, illustr. . 1 50

Antichità pubbliche romane, di I. G. HUBERT e W. KOPP, di p. XIV-324 . . . . . 4 50

Antologia provenzale, di E. PORTAL, di p. VIII-674 4 —

Antologia stenografica, di E. MOLINA, (esaurito)

Antropologia, di S. SERGI, in sostituzione del manuale esaurito, di G. CANESTRINI (in corso di stampa).

Antropologia criminale, di G. ANTONINI, di pagine VIII-167 . . . . 2 —

Antropometria, di R. LIVI, di p. VIII-237 e 32 incis. 3 50

Ape latina. Dizionario di frasi, sentenze ecc., cura di G. FUMAGALLI, p XVI-353 . . . . 3 50

Apicoltura, di G. CANESTRINI, 9ª ediz. ampliata, a cura di V. ASPREA, pag 250, con 55 inc. 5 50

Appalti di opere pubbliche, di A. CUNEO, di pag. VIII-571 . . . . 6 —

Apparecchiatura dei tessuti di lana, di G. STROBINO, di pag. VIII-618, con 404 incisioni. . . . 10 50

Apprendista meccanico, di V. GOFFI, 2ª ediz. di pag. 400 con 218 illustrazioni 7 50

Arabo parlato in Egitto. Grammatica e vocabolario, di A. NALLINO, 2ª ediz., di pag. XXVI-551 . . 7 50

Arabo parlato in Libia. Grammatica e repertorio di vocaboli e frasi di E. GRIFFINI, di pag. LII-378 . 6 —

— vedi: Grammatica Italo-Arabo.

Araldica (Grammatica), di F. TRIBOLATI. 4ª edizione a cura G. CROLLALANZA (in ristampa).

— vedi: Vocabolario Araldico.

Araldica zootecnica di E. CANEVAZZI, di p. XIX-342 e 43 incis.. . . . . 3 50

Arazzo (L'arte dell') (Gobelins) di G. B. ROSSI, di p. XV-239 e 130 illustr. . . . . 5 —

Archeologia e storia dell'Arte greca di I. GENTILE, 3ª ediz. rifatta da S. Ricci, (esaurito).

Archeologia — vedi: Atene - Antichità greche - Antichità romane - Epigrafia - Paleografia - Rovine Palatino - Topografia di Roma.

Architettura italiana antica e moderna, di A. MELANI. 5ª ediz., di p. XXXII-688, con 180 tavole . 12 —

— vedi: Stili architettonici.

Archivista (L'), di P. TADDEI, Man. teorico pratico, di p. VIII-486 . . . . 5 —

Archivisti (Manuale per gli), di P. PECCHIAI, di pagine VI-229 . . . . 3 —

Argentatura — vedi: Enciclopedia galvanica - Galvanizzazione - Galvanoplastica - Galvanostegia - Metallocromia - Metalli preziosi - Piccole industrie - Ricettario dell'elettricista.

Argentina (Repubblica), storia e condizioni geografiche di E. COLOMBO, di p. XII-320 . . . 3 50

Aritmetica pratica, di E. PANIZZA, 2ª ed., p. VIII-188 1 50

L. c.

Aritmetica razionale, di F. PANIZZA, 7ª ediz., di p. XII-210. . . . . 3 —
— (Esercizi di) F. PANIZZA, di pag. VIII-150 . . . . 1 50
Aritmetica e geometria dell'operaio, di E. GIORLI. 6ª ed., p. XII-239, 79 inc., 136 eserc, 150 probl. 4 —
Armi antiche (Guida del raccoglitore) di I. GELLI di p. VIII-389, 23 tav. e 432 incis. 6 50
Armonia, di G. BERNARDI, 4ª ediz., di p. XXIV 366 . 7 50
Aromatici e nervini nell'alimentazione, di A. VALENTI, di p. XV-338 . . . . 4 —
Arsenico (L') nella scienza e nell'industria, di L. MAURANTONIO, di p. XII-256 . . . . . 2 50
Arte (L') di distinguere gli Stili, di A. MELANI, Vol. 1°. Architettura, scultura, ecc. di p. 610, con 260 ill. 12 —
— Vol. 2°. Legni e metalli, ori, argenti e smalti, di p. 624, con 316 illustr. . . . . 12 —
Arte decorativa antica e moderna, di A. MELANI, 2ª ediz. di p. XXVII-551, 88 incis. e 175 tav. 12 —
Arte del dire (Retorica) di D. FERRARI, 10ª ed. p. 286 4 50
Arte della memoria. Storia e teoria di B. PLEBANI, 2ª ediz., di pag. XXVI-235 con 13 illustrazioni. . . 4 —
Arte nei mestieri di I. ANDREANI, in 3 volumi.
I. Il falegname, 2ª ed. di p. 309, 264 incis. e 25 tav. 4 —
II. Il fabbro, di p. VIII-250, con 266 incis. e 50 tav. 3 —
III. Il muratore, 3ª ediz. di p. VIII-273, con 235 incis. 6 —
Arti grafiche fotomeccaniche, di P. CONTER. 4ª ediz., di p. XII-228, 43 incis. e 8 tav. 3 50
Asfalto (Fabbricazione e applicazione), di E. RIGHETTI, di p. VIII-152 e 22 incis. (in ristampa).
Asfalto, bitume e catrame, di L. MAZZOCCHI, di peg 196, con 58 incisioni 5 50
Assicurazione (Manuale di), di G. ROCCA, p. XIX-634 7 —
Assicurazione in generale, di U. GOBBI, di pagine XII-308 . . . . 3 —
Assicurazioni sulla vita, di C. PAGANI, di pagine VI-161 . . . . 1 50
Assicurazioni e stima danni aziende rurali di A. CAPILUPI, di p. VIII-284 e 17 incis. . . 2 50
— vedi: Matematica attuariale - Patologia infortuni lavoro - Scienza attuariale.
Assiriologia, Grammatica, Crestomazia, ecc., di G. BOSON, di pag. 346 . . . . 9 —
Assistenza e terapia degli ammalati di mente, di M. U. MASINI e G. VIDONI, di p. VIII-233 2 50
Assistenza infermi, di C. CALLIANO, 2ª ediz., di p. XXIV-r48 e 7 tav. (esaurito).
Assistenza degli infermi — vedi: Epidemie esotiche - Malattie infanzia - Malattie dei lavoratori - Malat. paesi caldi - Medicatura antisettica - Medicina sociale - Medicina d'urgenza - Medico pratico - Rimedi - Soccorsi d'urgenza - Tisi - Tisici e sanatori - Tubercolosi.
Assistenza dei pazzi, di A. PIERACCINI, e pref. di E. Morselli, 2ª ediz., p. XX-279 . . . . . 2 50
Astronomia, di J. N. LOCKYER e G. CELORIA. 5ª ed., di p. XVI-275 e 54 incis. 1. 50
Astronomia nautica, di G. NAGGARI, 2ª ediz., di p. XVI-348 e 48 fig. 4 50

L. C.

Astronomia antico testamento, di G. V. SCHIAPARELLI, di p. 204 . . . . 1 50

Atene antica e moderna. Cenni, di S. AMBROSOLI, di p. LV-170, e 22 tavole 4 50

Atlante geografico storico d'Italia, di G. GAROLLO, p. VIII-67 e 24 tav. . . . . 2 —

Atlante geografico universale di R. KIEPERT e testo di G. Garollo, di p. VIII-88 e 27 carte. 11ª ed. 2 50

Attrezzatura navale, di F. IMPERATO, 2 volumi:

I. Attrezzatura navale, 6ª ediz. di pag. 570, con 423 fig. nel testo (in ristampa).

II. Manovra delle navi a vela e a vapore, segnalazioni maritt. 6ª ediz. di p. 852, 295 inc. e 19 tav. col. 18 —

Autocromista (L'). Fotografia a colori, di L. PELLERANO, di pag. XXXII-544 con 75 fig. e 38 tavole 12 —

Autografi (L'Amatore di) di E. BUDAN, p. XIV-426 e 361 facsimili 4 50

Autografi (Raccolte e raccoglitori di), di C. VANBIANCHI, di p. XVI-376 e 102 tav. 6 50

Automobilista (Man. del) a guida pei meccanici conduttori d'automobili, di G. PEDRETTI, 5ª ediz. di pag. XXXII-1072 con 895 illustrazioni. 14 50

Automobili — vedi: Caldaie a vapore - Chauffeur - Ciclista - Locomobili - Motociclista - Trazione a vapore.

Avarie e sinistri marittimi, Manuale del liquidatore di V. ROSSETTO, p. XV-496 e 23 fig. . . . 5 50

Aviazione (Aeroplani, Idrovolanti, Eliche) di E. GARUFFA, 2ª ediz. di pag. 980, con 863 incisioni . . . 20 —

Avicoltura — vedi: Animali da cortile - Colombi - Fagiani - Malattie dei polli - Ornitologia - Pollicoltura - Uccelli canori - Uovo di gallina

Avvolgimenti delle macchine elettriche a corrente continua ed alternata, di M. MAZZOCCHI, di pag. 837, con 780 figure 22 50

Bachi da seta, di F. NENCI, 4ª ed. (in ristampa).

Balbuzie. Cura dei difetti d. pronuncia di A. SALA, di p VIII-214 . . . 2 —

Ballo (Il). *I balli di jeri,* di I. GAVINA. 3ª edizione riveduta da G. FRANCESCHINI, di pag. VIII 253 con 103 fig. 3 50

Ballo (Il). *I balli d'oggi,* di F. GIOVANNINI di p. VIII-183. 4 50

Bambini — vedi: Balbuzie - Malattie d'infanzia - Nutrizione del bambino - Ortofrenia - Rachitide.

Bandiere, insegne e distintivi dei principali Stati del Mondo, di F. IMPERATO, di pagine XVI-220, con 50 tavole a colori . . . . . . 7 —

Barbabietola da zucchero. Storia, lavorazione, ecc., di A. SIGNA p. XII-225 e 29 fig. 8 50

Barbabietola da zucchero. Coltivazione di B. R. DEBARBIERI, p. XVI-220 e 12 fig. 2 50

Batteriologia. G. CANESTRINI. 2ª ed., (esaurito).

Beneficenza (Manuale della), di L. CASTIGLIONI e G. ROTA, di p. XVI-340 . . . . 3 50

Bestiame e agricoltura in Italia, di F. ALBERTI. 2ª ed. di U. BARPI p. XII-322, 47 tav. e 11 fig. 4 50

L. C.

Bestiame — vedi ai singoli titoli: Abitazioni di animali - Alimentazione del bestiame - Araldica zootecnica - Cammello - Cavallo - Coniglicoltura - Igiene veterinaria Majale - Malattie infettive - Polizia sanitaria - Pollicoltura - Razze bovine - Suinicoltura - Veterinario Zebre - Zoonosi - Zootecnia.

Biancheria. Disegno, taglio e confezione di E. BONETTI. 4ª ediz.. di p. XX-269 e 71 tav. (esaurito).

Bibbia (Manuale della), di G. ZAMPINI, 2ª ediz. di pagine XX-312 . . . . 3 —

Bibliografia. G. FUMAGALLI 3ª ed. interamente rifatta di pag. 360, con 87 fig. 5 50

Bibliotecario (Man. del), di G. PETZHOLDT, traduzione di G. Biagi e G. Fumagalli, (esaurito).

Biliardo (Il) **e il giuoco delle bòcce,** di I. GELLI, 3ª edizione, di pag. XII-197 e 80 illustrazioni. . . . 3 50

Biografia vedi: C. Colombo - Dantologia - Dizionario di botanica - Dizionario biografico - Manzoni - Napoleone I - Omero Shakespeare.

Biologia animale, di G. COLLAMARINI, di p. X-42 e [illegible] tav. . . . . 3 —

Biologia marina, di R. ISSEL, di p. 627, con. 211. fig. 10 —

Birra, fabbricazione, ecc., di S. RASIO e F. SAMARANI [illegible] 279 e 25 fig 3 50

Bitume — vedi: Asfalto.

Bonificazioni. Amministrazioni, ecc., di G. MEZZACORTE. p. XII-294 . . . . 3 —

Bonificazioni (La pratica delle), di A. FANTI, di pagine XX-368, con 75 inc. . . . . 4 —

Borsa e valori pubblici, di E. BONARDI di pagine XXVI-916 . . . . 9 —

Boschi e pascoli. Storia, importanza idro-geologica, ecc., di E. FERRARI, di pag. 380, con 15 tavole . . 3 50

Botanica, di I. D. HOOKER-PEDICINO N., 5ª ediz. a cura di G. Gola. di p. XVI-144 e 74 fig. 1 50

Botanica — vedi ai singoli titoli: Ampelografia - Anatomia vegetale - Barbabietola - Caffè - Dizionario di botanica - Fisiologia vegetale - Floricoltura - Funghi Jucca - Garofano - Giardiniere - Malattie crittogamiche - Orchidee - Orticoltura - Piante e fiori - Piante erbacee a seme oleoso - Piante industriali - Pomologia - Prodotti del tropico Rose - Selvicoltura - Uve - Tabacco.

Bottaio (Il). Fabbricazione e misura delle botti, di L. PAVONE, riveduto da A. Strucchi, di p. 240, con 127 fig. 3 —

Boyscout — vedi Scoutismo.

Bromatologia. I cibi dell'uomo, di S. BELLOTTI, di p. XV-251 . . . . 3 50

Buddismo, di E. PAVOLINI, di p. XVI-164 (esaurito).

Cacciatore (Manuale del), di G. FRANCESCHI. 5ª ediz., aumentata, di p. XVI-489 con 83 inc. e tavole schem. 7 —

Caffè. Suo paese e importanza, di B. BELLI. di p. XXIV-395 e 48 tav. 4 50

Caffettiere e sorbettiere, di L. MANETTI, di pagine XII-311 e 65 fig. (in ristampa).

L. c.

Calcestruzzo (Costruzioni in) ed in cemento armato, di G. Vacchelli, 5ª ediz., di p. 407 (in ristampa).

Calci e cementi, di L. Mazzocchi. 4ª ediz., di pagine XII-256 e 64 fig. 3 50

Calcolazioni mercantili e bancarie — vedi: Affari - Calcoli fatti - Commerciante - Computisteria - Contabilità - Interesse e sconto - Prontuario del ragioniere - Monete inglesi - Ragioneria - Usi mercantili - Valori pubblici.

Calcoli fatti. 90 tabelle di calcoli fatti di E. Quaio. 2ª ediz. di p. XII-342 . . . . 4 50

Calcolo dei canali in terra e in muratura, di C. Sandri, di p. VIII-305 . . . . . 4 50

Calcolo infinitesimale, di E. Pascal:

I Calcolo differenz., 4ª ediz. di pag. 325 . . . 4 50

II. Calcolo integrale, 4ª ediz., di pag. 338 . . . 4 50

III. Calcolo delle variazioni e delle diff. finite, 2ª ediz. di pag. XII-325 . . . . 4 50

— Esercizi critici di calcolo differenziale e integrale, di E. Pascal, di p. XVI-275 (in ristampa).

Calcolo infinitesimale — vedi ai singoli titoli: Determinanti - Funzioni analitiche - Funzioni ellittiche - Gruppi di trasformazione - Matematiche superiori.

Calcolo numerico approssimato, di E. Maccaferri di pag. 216 . . . . 5 50

Caldaie a vapore e istruzione ai conduttori, di L. Cei, 3ª ediz. di p. XVI-474 e 282 fig. . . . . 4 —

Calderaio pratico e costruttore di caldaie a vapore, di G. Belluomini. 2ª ediz., di p. XII-248, con 220 inc. 4 —

Calligrafia. Cenni storici e insegnamento di R. Percossi, 2ª ediz., di p. XII-151 (esaurito).

Calore, di E. Jones, trad. Fornari, p. 304 e 98 fig. . 3 —

Camera di Consiglio Civile, di A. Formentano, di p. XXXII-574 . . . . 4 50

Cammello (Il) di E. Plassio, di pag. XII-303 con 2 tav. 3 —

Campicello scolastico (Il). Agricoltura pratica pei maestri di Azimonti e Campi: di p. 186 (esaurito).

Candele (L'industria delle). Estrazione e purificazione della Glicerina, del Dott. V. Scansetti di p. 450 c. 98 inc. 6 —

Cane (Il), razze, allevamento, ecc., di A. Vecchio, 3ª ed. con appendice " Le malattie dei cani " di P. A. Pesce, di p. XX-521 e 168 incisioni (in ristampa).

Cani e gatti, costumi e razze, di F. Faelli, di p. XX-429 e 153 fig. 5 50

Canottaggio, del Cap. G. Croppi, di p. XXIV-456, 387 incis. e 91 tavole 7 50

Cantiniere (Il) Man. di vinificazione di A. Strucchi 5ª ediz. a cura del Prof. F. A. Sannino, p. 315 con 63 fig. 6 50

Canto (Il) nel suo meccanismo, di P. Guetta, di p. VIII-253 e 24 incis (in ristampa)

Canto (Arte e tecnica del), di G. Magrini, 2ª ed. di p. 166 3 50

Canto gregoriano, di A. Ottolenghi, di p. XVI-119 2 —

Caoutchouc e guttaperca, di L. Settimi, di pagine XVI-253 e 14 ill. . . . . 3 —

Capitano marittimo (Il) di G. Albi, di p. XXIV-665 con 13 fig., 2 quadri fuori testo, 16 tav. a colori e un Dizionario commerciale marittimo in 5 lingue . . 10 50

L. C.

Capomastro (Man. del). Impiego di materiali idraulici-cementizi, di G. RIZZI, 3ª ediz., di pag. XVI-433 e 32 incisioni nel testo (in ristampa).

Capomeccanico nella Marina militare, mercantile, nei Regi arsenali, cantieri navali, ecc., di S. DINARO. 2ª ediz, riveduta, di p. 773, con 536 figure 15 50

Cappellaio, di L RAMENZONI, di p. XII-222 e 68 incis. 2 50

Carboni fossili inglesi, Coke, Agglomerati, di G. GHERARDI, di p. XII-586 e 5 carte geog (esaurito).

Carni conservate col freddo artificiale, di U. FERRETTI, di p. XVI 499 e 83 fig. . . . . . 5 —

Carta (Industria della), di L. SARTORI, di p. 329 e 106 inc. 7 50

Carte fotografiche. Preparazioni, ecc. di L. SASSI, p. XII-353 (esaurito)

Carte magiche (Le), Giuochi di destrezza, di PH. DE-FRANK, di p. XII-148 con 36 illustr. (in ristampa).

Cartografia. Teoria e storia di E. GELCICH, di p. VI-257, con 36 fig. (esaurito).

Cartografia — vedi ai singoli titoli: Catasto - Celerimensura - Compensazione errori - Disegno topografico - Estimo - Lettura delle carte - Telemetria - Topografia - Triangolazioni

Casa dell'avvenire (La). Vade-mecum dei costruttori, ecc. di A. PEDRINI, 2ª ed. di p. XVII-917 e 445 fig. 9 50

Casaro (Man. del), di L. MORELLI. Fabbricazione del burro e del formaggio 2ª ediz. di p. 275, con 128 inc. 7 —

Case operaie — vedi: Abitazioni popolari - Casa dell'avvenire - Casette popolari - Città moderna - Fabbricati civili - Progettista moderno.

Case coloniche, di F. ANDREANI, di p. 387, con 116 inc. 8 50

Caseificio, di G. FASCETTI, storia e teoria della lavorazione del latte, 2ª ediz di p. 717, con 113 incisioni 12 50

Casette popolari, villini economici e abitazioni rurali, di I. CASALI 4ª ediz., di pag. VIII-508 con 570 fig. 8 —

Catasto italiano, di E. BRUNI (in ristampa).

Catrame (Il) e suoi derivati di G. MALATESTA, di pag. 628, con 80 fig. . . . . 4 —

Catrame — vedi: Asfalto.

Cavalli (L'arte di guidarli) di C. VOLPINI, di pagine XXIV-216 e 100 illustrazioni . . . . . . 6 —

Cavallo (Il) di C. VOLPINI, 5ª ediz., di p. XX-543, con 93 fig. e 43 tav. a cura di A. GIANOLI . . . . . 9 —

— Proverbi sul) raccolti da C. VOLPINI, di p. XIX-172 . 2 50

Cavi telegrafici sottomarini, di E. JONA, di p. XVI-338 e 188 fig. 5 50

Celerimensura e tav. logarit. di F. BORLETTI. 2ª edizione, di pag. XVI-298 e 30 incisioni . . . . . 5 —

Celerimensura (Tavole di) di G. ORLANDI, di p. 1200 18 —

Cellulosa, celluloide, ecc., di G. MALATESTA, di pag. VIII-176 . . . . 3 —

Cemento armato (Man. pratico per l'impiego del), di A. ARCANGELI, di pag. 225, con 85 incis. 6 50

Cemento armato — vedi: Calcestruzzo - Calci e cementi - Capomastro - Mattoni - Vocabol. tecnico vol. VIII

Centrali elettriche — vedi: Correnti alternate - Elettrotecnica - Illuminaz. elettrica - Ingegn. elettricista.

L. c.

Ceramiche — vedi: Prodotti ceramici - Maioliche e Porcellane - Fotosmaltografia applicata alle.

Cere — vedi: Imitaz. e succedanei - Industria stearica - Materie grasse - Merceologia tecnica - Ricettario ind

Chauffeur (Il meccanico "chauffeur„ automotorista). Testo completo per le scuole specializzate, utilissimo per chi vuole ottenere la licenza governativa di automotorista di G. PEDRETTI. 5ª edizione ampliata con note di Legislazione automobilistica dell'avv. Ugo Gatti di pag. XXIV-1031 con 979 figure, tabelle e appendice. 16 50

Chauffeur di se stesso. Man. pratico ad uso di chi guida la propria automobile senza chauffeur, di G. PEDRETTI. 2ª ediz. di pag. 495 con 336 fig. (in ristampa).

Chimica, di H. E. ROSCOE, 7ª ediz. a cura E. RICCI, di pag. VIII-238 (esaurito).

Chimica (Storia della) di E. MEYER. Ediz. ital. a cura dei Dott. U. e C. GIUA e pref. I. GUTRESCHI, di pagine XXVIII-721 7 50

Chimica agraria, di A. ADUCCO, 3ª ediz. di pag. 572 4 —

Chimica agraria — vedi: Adulterazione vino - Alcool - Birra - Casaro - Caseificio - Cognac - Densità dei mosti - Distillazione vinacce - Enologia - Fecola - Fermentazione e fermenti - Fosfati - Humus - Liquorista - Malattie vini - Terreno agrario - Zucchero.

Chimica analitica. di W. OSTWALD, trad. di A. Bolis, 2ª edizione, di pag. XVI-296 . . . . 3 50

Chimica applicata alla igiene — vedi: Analisi chimica qualitativa - Bromatologia - Chimica clinica - Chimica legale - Chimica delle sostanze alimentari - Disinfezioni - Elettrochimica - Farmacista - Igienista - Reattivi e reaz. - Spettrofotometria - Urina - Urologia - Veleni.

Chimica applicata alle industrie — vedi: Acido solforico - Alcool industriale - Alluminio - Analisi volumetrica - Birra - Chimica sostanze alimentari, coloranti - Chimico - Conservazione prodotti, sostanze - Colori e vernici - Distillazione legno - Enologia - Esplodenti - Gas illuminante - Industria della carta frigorifera, saponiera, stearica. tartarica, tintoria - Metallocromia - Merceologia - Pirotecnia - Prodotti e procedimenti - Ricettario domestico, dell'elettricista, industriale - Sale e saline - Soda caustica - Specchi - Tintore - Vetro - Zolfo - Zucchero.

Chimica clinica, di R. SUPINO (in ristampa).

Chimica generale per gli Istituti tecnici, di P. E. ALESSANDRI. Svolgimento dell'intero programma di esame prescritto per tutte le Sezioni, di p. XVI-416, con 20 tabelle e 81 incisioni 9 50

Chimica fotografica, di R. NAMIAS, 2ª ediz. . . 5 50

Chimica industriale e sue applicaz,. di C. CLAUDI, di pag. 720, con 264 illustraz. e tavole. . . . . 12 —

Chimica legale (Tossic.), di N. VALENTINI di p. XII-243 3 50

Chimica delle sostanze alimentari, ad uso dei Medici, dei Farmacisti, ecc., di P. E. ALESSANDRI. 2ª ediz. di p. XV-627, due tav. e 149 incis. . . . 6 50

Chimica delle sostanze coloranti. (Tintura d. fibbre tessili di A. PELLIZZA, di p. VIII-480 . . 6 50

Chimico (Man del) e dell'Industriale di L. GABBA. 5ª ediz. colle tav. di H. Will di p. XXIV-588 (in ristampa).

L. C.

Chimico siderurgico (Il) Analisi dell'acciaio e dei prodotti siderurgici, di R. NAMIAS, di p 252. con inc. 5 50
Chiromanzia e tatuaggio, di G. L CERCHIARI, di p. xx-232 e 60 ill. 5 50
Chirurgia operativa, di R. STECCHI e A. GARDINI, di p. VIII-322, con 118 inc. (in ristampa).
Chitarra (Studio della), di A. PISANI, di p. XVI-138, 52 fig. e 27 esempi . . . . 3 —
Cibi — vedi: Aromatici - Bromatologia - Carni conservate - Conservazione sostanze alim. - Macelli moderni - Gastronomo moderno - Pane - Pasticciere - Pastificio - Patate - Tartufi e funghi.
Ciclista (Manuale del), di U. GRIONI, 3ª ediz., di p. XVI-496, 285 incis. e 8 tav. 6 50
Cinematografia (Guida pratica della) di V. MARIANI, di pag. XXIII-312, con 151 illustraz. . . . . . . 5 —
Città moderna, (La), ad uso degli ingegneri, di A. PEDRINI, di p. XX-510, 194 fig. e 10 tav. . . . . . 5 —
Città (Costruzione delle) di A. CACCIA, di pag. 299 con 270 incisioni 4 50
Classificazione delle scienze, di C. TRIVERO, p. XVI-292 . . . . 3 —
Climatologia, di L. DE MARCHI, di p. X-204 e 6 carte 1 50
Codice del bollo. Testo unico commentato da E. CORSI, di p. C-564 . . . . 4 50
Codice cavalleresco italiano, di J. GELLI, 12ª ediz. di pag. 336 . . . . 4 50
Codice civile del Regno, riscontrato e coordinato da L. FRANCHI, 6ª ediz. con appendice, p. 243 . . 3 —
Codice di commercio. riscontrato da L. FRANCHI, 6ª ediz. di p. 208 (in ristampa).
Codice doganale italiano, commentato da E. BRUNI, di p. XX-1078 . . . . 6 50
Codice dell'Ingegnere Civile, Industriale, Navale, Elettrotecnico, di E. NOSEDA, 2ª edizione rifatta, di pag. XXIV-1005 . . . . 9 50
Codice nuovo del lavoro. Manuale di legislazione sociale, di E. NOSEDA, di pag. XXIII-605 . . . . 8 50
Codice di marina mercantile, 4ª ediz a cura di L. FRANCHI, di p. IV-290 (in ristampa).
Codice penale e nuovo codice di procedura penale, a cura di L. FRANCHI, 6ª ediz., di pag. 246 3 —
Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo per L. FRANCHI, 5ª ediz. colle disposizioni emanate per la Guerra di p. 290 . . . . 4 50
Codice del perito misuratore, di L. MAZZOCCHI e E. MARZORATI, 3ª ediz., di p. VIII-582 e 18 ill. . . 7 —
Codice di procedura civile, riscontrato da L. FRANCHI, 3 ediz., di p. 181 . . . . 1 50
Codice del teatro, di N. TABANELLI, di p. XVI-328 3 —
Codici (I cinque) del Regno d'Italia (Civile - Procedura civile - Commercio - Penale e nuovo Codice di Procedura penale), edizione Vade-mecum. a cura di L. FRANCHI. 6ª ediz., di pag. 902 (in ristampa).
Codici e leggi usuali d'Italia, riscontrati sul teste ufficiale e coordinati e annotati da L. FRANCHI, raccolti in sette grossi volumi legati in pelle.

L. C.

Vol. I. Codici — Codice civile - di procedura civile - di commercio - penale - procedura penale - della marina mercantile - penale per l'esercito - penale militare marittimo *(otto codici)* 4ª ed. (in prepar.)

Vol. II. Leggi usuali d'Italia. Raccolta coordinata di tutte le leggi speciali più importanti e di più ricorrente ed estesa applicazione in Italia; decreti regolamenti, ecc. **Parte I.** Dalla voce " Abbordi di mare „ alla voce " Croce rossa „, 3ª ediz. di pag. XII-1320 . 18 50

— **Parte II.** Dalla voce "Dazio consumo„ alla voce "Mutuo soccorso„ 3ª ediz. pagine 1321 a 2744 . . 18 50

— **Parte III.** Dalla voce " Navigazione interna „ alla voce "Stazzatura „ pag 2725 a 3605 . . . . 16 50

— **Parte IV.** Dalla voce " Strade ferrate „ a fine, da pagina 3607 a 4670 . . . . 26 50

— **Appendice** alla 2ª ediz. Le leggi dal 15 maggio 1905 al 1° gennaio 1911, di p. 1910 a due colonne, legatura in tutta pelle 10 50

Vol. III. Leggi e convenzioni sui diritti d'autore, raccolta generale delle leggi italiane e straniere di tutti i trattati e le convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati. 2ª ediz. di p. VIII-617 . . . . . . 6 50

Vol. IV. Leggi e convenzioni sulle privative industriali. Disegni e modelli di fabbrica. Marchi di fabbrica e di commercio. Legislazione italiana e straniera. Convenzioni fra l'Italia ed altri Stati, di pagine VIII-1007 . . . . 6 50

Cognac. Spirito di vino e distillazione delle fecce e d. vinacce, di DAL PIAZ-PRATO. 2ª ediz. a cura di A. F. Sannino, di p. XII-210, con 38 incis. . . . . . 2 —

Coleotteri italiani. di A. GRIFFINI, di p. XVI-334 e 215 incis. (in ristampa).

Collaudazione di materiali, di V. GOFFI, di p. XV-260, 25 incis. e 8 tav. 4 50

Colle animali e vegetali, gelatine e fosfati d'ossa, di A. ARCHETTI, di p. XVI-195 . . . . . . 3 50

Colombi domestici e colombicoltura, di P. BONIZZI, 3ª ediz., di p. X-212 e 26 fig. (in ristampa),

Colonie. Manuale coloniale, di P. REVELLI, pubblicato per cura della Società di Esplorazioni Geografiche di Milano, di pag. XII-240. . . . . 3 50

Colonie. Elenco delle località abitate nelle Colonie italiane, di C. TRIVERIO, di pag. IV-66 con 4 carte geogr. 1 50

Colori (La scienza dei) e la pittura, di L. GUAITA, 2ª ediz., di p. IV 368 (in ristampa).

Colori e vernici, ad uso dei pittori di M. MEYER e P. BONOMI DA-PONTE. 5ª ediz. del Man. GORINI-APPIANI di pag. XVI-308 con 39 incisioni . . . . . . 3 —

Colori e vernici (Industria dei). Materie prime, fabbricazione, applicazioni, di E. RIZZINI, di pag. XVI-564, con 142 fig. e 10 tav. . . . . 8 —

Coltivazione industriale delle piante aromatiche e medicinali di C. CRAVERI, di pagine XXIX-307 - 75 incisioni e 24 tavole a colori . 10 50

L. C.

Coltura montana, di G. SPAMPANI, di p. VIII-424 e 171 incis. 4 50

Commerciante (Manuale del), di C. DOMPÉ, 5ª ediz., accresciuta, di p. 766 . . . . 16 —

Commercio (Storia del) di R. LARICE, 2ª ed., p. XII-299 8 —

Commercio — vedi ai singoli titoli: Affari - Codice di comm., doganale - Corrispondenza - Geografia economica, commerciale - Produzione e commercio vino - Scritture affari - Storia del Comm. - Usi mercantili.

Commissario giudiziale — vedi: Curatore dei fallimenti.

Compensazione degli errori e rilievi geodetici, di F. CROTTI, di p. IV-160 . . . . . . 2 —

Composizione delle tinte nella pittura a olio e ad acquerello, di G. RONCHETTI, di pagine VIII-186 . . . . 3 —

Computisteria, di V. GITTI: Vol. I. Computisteria commerciale, 9ª ediz. di p. 224 . . . . 1 50

— Vol II. Computisteria finanziaria, 7ª ediz., p. VIII 190 3 —

Computisteria agraria, L. PETRI, (in ristampa).

Concia delle pelli. L'Arte del conciatore, del cuoiaio e del pellicciaio, di G. VENTUROLI, 4ª ediz., di pagine XVI-206 (in ristampa)

Concia e tintura delle pelli, di V. CASABURI, di pag 445 e XXX tabelle . . . . 6 —

Conciatore (Manuale del) di A. GANSSER, di pagine XXIV-382 con 22 incisioni e 2 tavole. . . . . 6 —

Conciliatore (L'ufficio di Conciliazione) di C. CAPALOZZA, di p. XLIII-461, con 144 formule (esaurito).

Concimi, di A. FUNARO, 3ª ediz. di p. VIII-300 . . 2 50

Condottura d'acqua potabile, di P. BRESADOLA, di p. XV-334, con 37 fig (in ristampa).

Congelamenti. Patogenesi e cura del Maggiore Medico P. CASALI e Capitano Medico F. PULLÈ, con prefazione Prof. LUIGI DEVOTO, di pag. XVI-365, con 117 illustrazioni 6 50

Conifere (Le), **da rimboschimento**, di C. CRAVERI, di pag. XII-322, con 85 figure . . . . 4 —

Coniglicoltura pratica, di G. LICCIARDELLI. 7ª ediz., aumentata di p. 392, con 165 incis. 12 tav. colori 6 50

Conservazione delle sostanze alimentari, 4ª ediz. a cura Franceschi e Venturoli di p. VIII-231 (in ristampa)

Conservazione prodotti agrari, di C. MANICARDI, di p. XV-220 (in ristampa).

Conserve alimentari (L'industria delle) di G. D'ONOFRIO, di pag. XX-654, con 165 incisioni . . 5 50

Consigli pratici — vedi: Assistenza infermi - Caffettiere - Infortuni lavoro - Liquorista - Medicina d'urgenza - Pasticciere e confettiere - Ricett. domestico - Ricett. d. elettricista - Ricett. fotografico - Ricett. industriale - Ricettario industrie tessili - Ricettario di metallurgia - Soccorsi d'urgenza - Special. medicinali.

Consoli, Consolati e Diritto consolare, di M. ARDUINO, di p. XV-277 . . . . 3 —

Consorzi difesa del suolo. Idraulica, rimboschimento. di A. RABBENO, di p. VIII-296 . . . . . 3 —

Contabilità aziende rurali, di A. DE BRUN, di p. XIV-539 (in ristampa).

L. c.

Contabilità bancaria, di A. FALCO, di pag. XII-289 5 50

Contabilità comunale, di A. DE BRUN, 2a ediz di p. XVI-650 (esaurito).

Contabilità domestica per le famiglie e le scuole, di O. BERGAMASCHI — vedi Ragioneria domestica.

Contabilità e amministrazione imprese elettrotecniche, di F. MIOLA, di p. XVI-262 . 3 —

Contabilità generale dello Stato, di E. BRUNI 4a ediz., di p. XVI-457 . . . . 4 50

Contabilità — vedi: Computisteria commerciale, Finanziaria, Agraria - Contabilità comunale, domestica - Contabilità generale dello Stato - Interessi e sconti - Logismografia - Paga giornaliera - Ragioneria - Ragioneria delle Cooperative, Industriale, pubblica - Scritture d'affari - Società di mutuo soccorso.

Contrappunto, di G. BERNARDI, (in ristampa).

Contratti e collaudi di lavori edili, di F. ANDREANI, di pag. XVI-355. . . . . 4 50

Conversazione italiana neo-ellenica, di E. BRIGHENTI, di p. XII-143 . . . . . 2 —

Conversazione italiana-tedesca, di A. FIORI e G. CATTANEO. 9a ediz., di p. VIII-484 (in ristampa).

Conversazione francese-italiana, di E. BAROSCHI-SORESINI, 2a ediz., di p. XV-288 . . . . 3 50

Cooperative rurali, di V. NICCOLI. 2a ediz., di pagine VIII-394 . . . . . 3 50

Cooperazione nella sociologia e nella legislazione, di P. VIRGILII, di p. XII-228 . . . 1 50

Corano (Il). Versione letterale italiana, di A. FRACASSI di pag. LXIV-463 . . . . 6 50

Corano. Testo arabo e versione letterale italiana a fronte, di A. FRACASSI, di pag. LXX-700 . . . 11 50

Correnti elettriche alternate, ecc., di A. MARRO, 3a ediz., di pag. XLVIII-862, (in ristampa).

Corrispondenza bancaria, di A. FALCO, di pagine VIII-338 . . . . 4 —

Corrispondenza commerciale poliglotta, Italiana, Francese, Tedesca. Inglese, Spagnuola e Portoghese, di G FRISONI, in sei parti

I.	Parte italiana, 6a ediz., p. XX-520	. . . .	8 50
II.	„ spagnuola 2a ediz., di pag. XXIV-515	. .	6 —
III.	„ francese 4a ediz., p. 545.	. . . .	9 50
IV.	„ inglese. 3a ediz. di pag. XX-531	. . .	9 50
V.	„ tedesca. 2a ediz., di pag. XX-512	. . .	8 50
VI.	„ portoghese di pag. XVI-511	. . . .	6 —

Corrispondenza telefonica. Norme di servizio, ecc., di O. PERDOMINI, di p. XII-375 . . . . . 3 50

Corse. Dizionario delle voci più in uso, di G. FRANCESCHI, di p. XII-305 . . . . . 2 50

Corti d'Assise. Guida dei dibattimenti, di C. BALDI, di p. XX-401 . . . . . 3 50

Cosmografia, (Lezioni di) di G. BOCCARDI (in sostituzione del Manuale del LA LETA), di pag. XII-233, con 20 inc. e 2 tav. . . . . 3 —

L. c.

Costruttore navale, di G. Rossi, 2ª ediz. rifatta, di pag. XVI-817, con 674 figure 10 50

Costruzioni — vedi: Abitazioni - Appalti - Architettura - Calcestruzzo - Calci - Capomastro - Casa dell'avvenire - Casette popolari - Città (La) moderna - Codice dell'ingegnere - Contratti e collaudi - Costruzioni enotecniche, lesionate, metalliche, rurali - Fabbricati civili - Fabbricati rurali - Fognatura - Fondazioni terrestri e idrauliche - Imitazioni - Ingegn. civile - Ingegn. costrutt. meccanico - Lavori marittimi - Laterizi - Mattoni e pietre - Muratore - Peso metalli - Progettista moderno - Prontuario agricoltore ingeg. rurale - Resistenza dei materiali - Resist. e pesi di travi metalliche - Riscaldamento - Stime di lavori edili.

Costruzioni in cemento armato, di G. Baluffi, 2ª ediz. di pag. 310 con 100 illustr. 7 50

Costruzioni enotecniche, di S. Mondini, di p. IV-251, con 53 incis. 4 50

Costruzioni lesionate. Cause e rimedi di I. Andreani, di pag. XII-243 con 122 incisioni . . . 3 50

Costruzioni metalliche, di G. Pizzamiglio, di p. L-947, con 1643 incis. e 52 tav. . . . . . . 22 —

Costruzioni rurali in cemento armato, di A. Fanti, 2ª ediz. completamente rifatta, di pag. XVI-315, con 160 inc. 4 50

Cotone (Guida per la coltivazione del), di C. Tropea, p. X-165 e 21 incis. 2 50

Crestomazia neo-ellenica, di E. Brighenti, di p. XVI-405 . . . . 5 50

Cristallografia, di F. Sansoni, (esaurito, 2ª ediz. rifatta da C. Viola, in lavoro).

Cristoforo Colombo, di V. Bellio p. IV-136 (esaur.)

Crittografia diplomatica e commerciale, di L. Gioppi, di p. 177 (esaurito)

Cronologia e calendario perpetuo, di A. Cappelli, di p. XXXIII-421 . . . . 6 50

Cronologia delle scoperte e delle esplorazioni geografiche, di L. Hugues, di p. VIII-487 5 50

Cronologia e storia medioevale e moderna, di V Casagrandi, 3ª ediz. di pag. 262 (in ristampa).

Cubatura dei legnami rotondi e squadrati, di G. Belluomini, 13ª ediz., di p. VI-229 . . . 4 50

Cultura e vita greca (Disegno storico della), di D. Bassi ed E. Martini, di p. XVI-791, 107 fig. e 13 tav. 9 50

Cuore (Il). Suoi mali e sue cure, di G. Fornaseri, di pag. XII-421, con 99 figure 5 50

Cuore (Terapia fisica del) di L. Minervini, di p. XII-475 5 50

Curatore di fallimenti (Manuale del) e del Commissario Giudiziale, di L. Molina (2ª ediz. di p. LX-892 8 50

Curve circolari e raccordi. Tracciamento delle curve, di C. Ferrario, (in ristampa).

Curve graduate e raccordi pei tracciamenti ferroviari, di C. Ferrario, di p. XX-251 e 41 fig. 4 50

L. c.

Curve. Tracciamento delle ferrovie e strade, di G. H. A. KRÖHNKE. trad. di L. Loria, 3ª ediz. p. VIII-167 . 3 50
Dama (Il giuoco della) all'italiana, di L. AVIGLIANO, di pag. 287, con 200 diagrammi e 2 tavole . . . 5 50
Dantologia. Vita e opere di Dante, di G. A. SCARTAZZINI, 3ª ediz. a cura N. Scarano, di p. XVI-424 . . 3 —
Dattilografia. Manuale teorico pratico di scrittura a macchina, di I. SAULLE, di pag. XII-225, con 50 inc. . 4 50
Dazi doganali del Regno d'Italia (Tariffa dei) al 1° maggio 1909, di G. MADDALENA, di p. 152 . 1 50
Debito pubblico italiano, E. BRUNI, di p. XII-444. 3 50
Determinanti e applicazioni, di E. PASCAL, di p. VII-330 (in ristampa).
Diabete mellito e sua cura di A. RODELLA, 2ª edizione di pag. XVI-204 . . . . 2 50
Dialetti italici, grammatica, ecc. di O. NAZARI, di p. XVI-364 (vedi anche **Italia dialettale** a pag 31) 3 —
Dialetti letterari greci, di G. BONINO, di pagine XXXII-214 . . . . 1 50
Didattica per le scuole normali, di G. SOLI. (2ª ediz in lavoro).
Dinamica elementare, di G. Cattaneo, di p. VIII-146 1 50
Dinamometri. Misura delle forze e loro azione lungo determ. trajettorie, di L. CAMPAZZI, di p. 293 e 132 inc. 3 —
Diplomazia e agenti diplomatici, di M. ARDUINO, di p. XII-269 . . . . 3 —
Diritti d'autore - vedi: Codici e leggi, Vol. III (pag. 14).
Diritti e doveri dei cittadini, ad uso delle scuole di D. MAFFIOLI, 14ª edizione, di p. XVI-230 . . . 3 —
Diritto amministrativo e cenni di Diritto costituzionale, di G. LORIS, 11ª ediz. di pag. 510 7 50
Diritto amministrativo — vedi: Beneficenza - Catasto - Codice doganale - Esattore comunale - Giustizia amministrativa - Imposte dirette - Legge sanità - Legislazione sanitaria - Morte vera - Municipalizzazione servizi - Polizia sanitaria - Ricchezza mobile
Diritto civile. Compendio di G. LORIS, (8ª ediz. in corso di stampa).
Diritto civile — vedi: Camera di Consiglio - Codice civile - Codice procedura civile - Codice dell'Ingegnere - Conciliatore - Diritti e doveri - Diritto italiano - Espropriazione - Ipoteche - Lavoro donne - Legge infortuni lavoro - Legge lavori pubblici - Legge registro e bollo - Legislazione acque - Legislazione rurale - Notaio - Prontuario legislativo - Proprietarie di case - Storia del diritto - Testamenti.
Diritto commerciale italiano, di E. VIDARI. 4ª ediz. di p. X-448 (in ristampa).
Diritto costituzionale, di F. P. CONTUZZI, 3ª ediz., p. XIX-456 (esaurito).
Diritto ecclesiastico, di G. OLMO. 2ª ed., pag. XVI-483 3 —
Diritto internazionale penale di S. ADINOLFI, di pag. VIII-258 . . . . 1 50
Diritto internazionale privato, di F P. CONTUZZI 2ª ediz., di p. XXXIX-626 . 7 50
Diritto internazionale pubblico, di F. P. CONTUZZI 2ª ediz., di p. XXXII-412 . . . . . . 3 —

L. C.

Diritto italiano, di G. L. ANDRICH, di p. XV-227 . 1 50
Diritto marittimo italiano, A. SISTO, pag. XII-556 8 —
Diritto penale romano, di C. FERRINI, 2ª ediz., di p. VIII-360 . . . . 8 —
Disegnatore meccanico, di V. GOFFI. 7ª ediz., di pag. 550 con 476 fig. . . . . 10 —
Disegno (Principi di), e gli stili dell'ornamento di C. BOITO 6ª ediz., di p. XII-182 con 61 inc. e append. di A. MELANI: L'insegnamento dell'arte decorativa di pagine 250 con 50 inc. . . . 6 50
Disegno (Corso completo di), in 80 tavole, di J. ANDREANI, 4ª ediz., di pag. 218 . . . . . . 5 50
Disegno (Grammatica del), di E. RONCHETTI, di p. IV-190 con 96 fig. e atlante di 106 tavole 9 50
Disegno assonometrico, di P. PAOLONI, di p. IV-122, 23 fig. e 21 tav., (in ristampa).
Disegno geometrico, di A. ANTILLI, 4ª ediz., di p. XII-88 e 28 tavole . . . . 3 —
Disegno — vedi anche Acquaforte - Disegno industriale - Disegno di projezioni ortogonali - Disegno topografico - Monogrammi - Oreficeria floreale - Ornamenti sulle stoffe - Ornatista - Teoria delle ombre.
Disegno industriale, di E. GIORLI. 6ª ediz., pag. 406 7 50
Disegno di proiezioni ortogonali, di D. LANDI, 2ª ediz., di p. VIII-152, con 132 figure . . . . . 2 —
Disegno topografico, di G. BERTELLI, 4ª ediz., di p. VI-158, con 12 tav a (in ristampa).
Disinfezione pubblica e privata, di P. E. ALESSANDRI e L. PIZZINI, 2ª ediz. di p. VIII-258 e 29 inc. . 2 50
— vedi Profilassi e disinfezione.
Distillazione del legno, di F. VILLANI, di p. XIV-312 4 50
Distillazione delle vinacce, delle frutte fermentate e di altri prodotti agrari, di M. DA PONTE. 3ª ediz., di p. XX-826 (in ristampa).
Ditteri italiani, di P. LIOY, di p. VII-356, con 227 fig. 3 —
Divina Commedia, di DANTE ALIGHIERI in tavole schematiche di L. Polacco, di p. X-152 e 6 tavole disegnate da G. Agnelli . . . . 3 —
Dizionario albanese — vedi Albanese parlato.
Dizionario alpino-italiano, di E. BIGNAMI-SORMANI e C. SCOLARI, di pag. XXII-310 . . . . . 3 50
Dizionario di abbreviature latine e italiane, di A. CAPPELLI 2ª ediz., di pag. LXVIII-528 . 10 50
Dizionario internazionale di aeronavigazione e costruzioni aeronautiche, italiano francese, inglese, tedesco, M. MELE DANDER, p. VIII-227 6 50
Dizionario bibliografico, di C. ARLIA, di p. 100 . 1 50
Dizionario biografico universale, di G. GAROLLO, due vol di p. 1118 a 2 colonne . . . . 20 —
Dizionario di botanica generale, di G. BILANCIONI, di p. XX-926 . . . . 12 —
Dizionario commerciale fraseologico Italiano-Inglese e viceversa, di F. A. MARANGONI p. 358 9 50
Dizionario dei Comuni e frazioni di Comuni del Regno d'Italia, secondo il Censimento 1911, di C. TRIVERIO, con un elenco delle località abitate nelle Colonie italiane, di pag. XII-512 . . . . . 5 50

L. C.

Dizionario enologico, di A. DURSO-PENNISI, di p. VIII-465 con 161 inc. . . . . 5 —
Dizionario Eritreo-Italiano-Arabo-Amarico, di A. ALLORI, di p. XXXIII-203 . 2 50
Dizionario fotografico in quattro lingue, di L. GIOPPI, di p. VIII-600, 95 inc. e 10 tavole . . . 7 50
Dizionario francese-italiano, di G. LE BOUCHER, di p. LXIV-556 . . . . . 3 50
Dizionario geografico universale, di G. GAROLLO, 2ª ediz. di p. XII-1451 (esaurito).
Dizionario Italiano-Giapponese, di S. CHIMENZ, di p. XVIII-219 . . . . 8 —
Dizionario giuridico — vedi: Dizionario Legale.
Dizionario Greco moderno-Italiano e viceversa, di E. BRIGHENTI, di p. LX-848-612 . . . 15 —
Separatamente:
Vol. I, Greco moderno-Italiano . . . . . . 8 —
Vol. II, Italiano-Greco moderno . . . . . 7 —
Dizionario italiano-inglese e ingl.-ital., di J. WESSELY, 16ª ediz a cura di G. Rigutini e G. PAYN, di p. VI-226-190 (in ristampa).
Dizionario Hoepli della lingua italiana, compilato da G. MARI — vedi Vocabolario.
Dizionario legale, di S. TRINGALI, di pag. XVI-1386 15 —
Dizionario milanese-italiano e italiano-milanese, di C. ARRIGHI, 2ª ediz., di p. 912 . . 8 50
Dizionario russo — Vedi Vocabolario russo.
Dizionario di scienze filosofiche, di C. RANZOLI, 2ª ediz. aumentata e corretta, di pag. VII-1252 . . 15 —
Dizionario serbo di BILINICH (in preparazione).
Dizionario Spagnuolo-Italiano e Italiano-Spagnuolo di G. FRISONI:
I. *Italiano-Spagnuolo.* Vol. di 1018 pag. L. 9.50 - leg. 12 50
Dizionario etimologico stenografico, di E. MOLINA, di p. XVI-624 (in ristampa),
Dizionario tecnico in 4 lingue, di E. WEBBER, 4 volumi
I. Italiano-Tedesco-Francese-Inglese, 2ª ediz. di p. XII-533 . . . . 5 —
II. Deutsch-Italienisch-Französich-Englisch (3ª ed. in lavoro).
III. Français-Italien-Allemand-Anglais, 2ª ediz., di p. VI-679 . . . . 8 50
IV. English-Italian-German-French, 2ª ed. aumentata di oltre 5000 termini di pag. IV-921 . . . . 12 50
Dizionario italiano-tedesco e ted-ital., di A. FIORI, 5ª ediz. per G. CATTANEO. (esaurito).
Dizionario italiano-tedesco e tedesco-italiano, di G. SACERDOTE, di p. XII-470, XXXII-480 . 6 50
Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca, inglese, francese, disposte in un unico alfabeto, di p. 1200 . . . . 8 50

L. C.

Dogana — vedi: Codice doganale - Codici e Leggi usuali d'Italia. Vol. II, Parte 1ª - Commerciante - Dazi doganali - Trasporti e tariffe.

Dottrina popolare in 4 lingue, (Italiana-Francese-Inglese-Tedesca) Motti, frasi, proverbi di G. SESSA. 2ª ediz., di p. IV-112 (esaurito).

Doveri del macchinista navale, di V. GOFFI, di pag. XVI-310 . . . . 3 50

Droghe e piante medicinali (Materia medica vegetale e animale) di P. A. ALESSANDRINI, 2ª edizione di pag. XV-778, con 207 inc. . . . . 9 —

Droghiere (Manuale del), di L. MANETTI, di p. XXIV-322 (in ristampa).

Duellante (Manuale del), di F. GELLI, 2ª ediz., di pag. VIII-250 e 26 tav (in ristampa).

— vedi anche Scherma.

Economia matematica, di F. VIRGILII e C. GARIBALDI, i p. XII-210 e 19 inc. . . . . 3 —

Economia politica, di W. JEVONS, trad. L. Cossa, 7ª ediz., di p. XV-180 (in ristampa).

Elettricità, di FLEEMING JENKIN, traduzione di R. FERRINI, 5ª ediz. rived., di p. XII-237 (in ristampa).

Elettricità — vedi: Cavi telegrafici - Contabilità imprese elettrotecniche - Correnti elettriche - Elettricità industriale - Elettrotecnica - Elettrochimica - Elettromotori - Enciclopedia galvanica - Frodi sui misuratori elettrici - Fulmini - Galvanizzazione - Illuminazione - Ingegnere elettricista - Magnetismo - Metallocromia - Onde Hertziane - Operaio elettrotecnico - Pila elettrica - Radioattività - Ricettario dell'elettricista - Röntgen - Sovra-tensioni - Telefono - Telegrafia - Unità assolute.

Elettricità industriale, di P. JANET, trad. di G. U. Brovedani, di p. XX-375 e 163 fig. 4 50

Elettricità e materia, di J. J. THOMSON, trad. di G. FAÈ, di p. XL-299 e 18 fig. . . . . 2 —

Elettricità medica. di A. D. BOCCIARDO, di p. X-201, con 54 inc. e 9 tav. (in ristampa).

Elettricità (Influenza dell') sulla vegetaz. e sui prodotti delle industr. agrarie di A. BRUTTINI, p. XVI-459 e 59 fig. 6 —

Elettricità sorgente di calore. Riscaldamento elettrico domestico di G. LO PIANO, di pag. VIII-188, con 153 illustrazioni 2 50

Elettrochimica. di A. COSSA di p. VIII-104 (esaurito).

Elettromotori campioni e misura delle forze elettromotrici, di G. P. MAGRINI, di pag. XVI-185 e 73 fig. . . . . 3 —

Elettrotecnica, (Principî di) di F. DESSY, di p. XII-128 (in ristampa)

Elioterapia (L') in alta montagna e trattamento della tubercolosi, di O. BERNHARD, traduzione R. CURTI, di pag. VII-125 con 49 tavole 5 50

Elioterapia (L') nella pratica medica e nell'educazione, di G. B. ROATTA, di pag. XV-155 con 77 tavole 4 50

Eloquenza civile e sacra. L. ASIOLI di p. IV-290 3 —

L. c

Embriologia e morfologia generale, di G. CATTANEO, di p. x-242 e 71 fig. (esaurito).

Embrione umano. Embriogenia e organogenia dell'uomo, di C. FALCONE, di p. xv-431, con 90 inc. 4 50

Emigrazione ed immigrazione, di M. ARDUINO, di p. x-248 . . . . 3 —

Enciclopedia galvanoplastica, elettrochimica e fotomeccanica, di P. CONTER, di pag. VIII-555 e 279 illustr. 7 50

Enciclopedia Hoepli (Piccola) 2a ediz. completatamente rinnovata dal dott. G. GAROLLO:
Volume I - lettere A-D di pag. x-1522 . . . 12 50
Volume II - lettere E-M, pag. 1523 a 3114 . . . 16 50
(Il Vol. III ed ultimo è in corso di stampa).

Enciclopedia legale, di S. TRINGALI — vedi Dizionario legale.

Energia fisica, di R. FERRINI, 2a ediz., di p. VIII-187 e 47 inc. 1 50

Enimmistica. Enimmi, sciarade, rebus, ecc., di D. TOLOSANI, di p. XII-516 e 29 illustr. 6 50

Enologia. di O. OTTAVI, 8a ediz. rifatta da A. Strucchi, di pag 327, con 50 inc. 5 50

Enologia domestica, di R. SERNAGIOTTO, 2a ediz., di p. XIV-223, con 26 inc. . . . . 3 —

Enologia — vedi ai singoli titoli: Alcool - Ampelogra-Adulterazione vino - Analisi vino - Bottaio - Cantiniere - Cognac - Costruzioni enotecniche - Densità dei mosti - Distillazione - Dizionario enologico - Liquorista - Malattie vini - Mosti - Produzione del vino - Tannini - Uva - Vini bianchi - Vini speciali - Vinificazione - Vino.

Epidemie esotiche, di F. TESTI, di p. XII-203 . 2 —

Epigrafia cristiana, di O. MARUCCHI, di p. VIII-453, con 30 tav. . . . . 10 —

Epigrafia italiana moderna, di A. PADOVAN, di di pag. XXVI-270 . . . . 3 —

Epigrafia latina, di S. RICCI, di pag. XXXII-448 e 55 tavole 6 50

Epilessia. Eziologia, patogenesi e cura, di P. PINI, di p. x-277 . . . . 2 50

Equazioni integrali (Teoria delle) di G. VIVANTI, di pagine 414 . . . . 4 50
— vedi Algebra complementare.

Equilibrio dei corpi elastici, di R. MARCOLONGO, di p. XIV-316 . . . . 4 50

Eritrea. Storia, geografia e note statistiche, di B. MELLI, di p. XII-164 . . . . 2 —

Errori e pregiudizi volgari. di G. STRAFFORELLO 2a ediz., di p. XII-196 (esaurito).

Esattore comunale, ad uso dei Ricevitori, ecc., di di R. MAINARDI, 2a ediz., di p. XVI-480 (esaurito).

Esercizi e quesiti sull'Atlante geogr. di R. Kiepert, di L. HUGUES, 3a ediz., di p. VIII-208 . 1 50

L. c.

Esercizi sintattici francesi, di D. RODARI, di p. XII-403 . . . . 3 —
Esercizi greci, di A. V. BISCONTI, 2ª ediz., di pag. XXVII-234 . . . . 3 —
Esercizi di grammatica italiana, di D. FERRARI, di pag. VIII-236 . . . . 3 —
Esercizi latini, di P. E. CERETI, di p. XII-333 . . 1 50
Esercizi di traduzione a complemento della gramm. francese, di G. PRAT, 3ª ediz., di p. XII-174 . . . . 1 50
Esercizi di traduzione a complemento della gramm. tedesca, di G. ADLER, 3ª ediz. di p. VIII-244 (esaurito).
Esplodenti e modi di fabbricarli, di R. MOLINA. 4ª ediz riveduta e ampliata con trattazione completa degli esplosivi moderni di pag. XXXII-422 . . 7 50
Espropriazioni per causa di pubblica utilità. di E. SARDI, di p. VII-212-83 (esaurito).
Essenze naturali. Estrazione - Caratteri - Analisi, ecc., di C. CRAVERI, con 73 figure . . . . . 5 —
Essenze artificiali. Fabbricazione - Caratteri - Analisi, ecc., di C. CRAVERI, con 44 figure 4 50
Estetica. Lezioni sul bello, di M. PILO, (in ristampa).
— Lezioni sul gusto, di M. PILO, di p. XII-255 . . . 2 50
— Lezioni sull'arte, di M. PILO, di p. XV-286 . . . 2 50
Estimo rurale, di P. FICAI, 2ª ediz. (in ristampa).
Estimo dei terreni, di P. FILIPPINI, di p. XVI-328 . 3 —
Etica (Elementi di), di G. VIDARI, 4ª ediz., di pag. XII-389 5 50
Etnografia, di B. MALFATTI, (esaurito).
Euclide emendato, di G. SACCHERI, trad. di G. Boccardini, di p. XXIV-126 e 55 fig. 1 50
Evoluzione. Storia e bibliografia evoluzionistica, di C. FENIZIA, di p. XIV-389 . . . . 3 —
Ex libris italiani (3500), illustrati da J. GELLI, di p. XII-535, 139 tav. e 757 figure . . . . 9 —
Fabbricati civili di abitazione, di C. LEVI, 5ª ediz., di p. XII-516 con 261 inc. 7 50
Fabbricati rurali. Costruzione ed economia, di V. NICCOLI, 4ª ediz., di p. XIX-410, con 185 fig. . . 4 50
Fabbro (Il), di J. ANDREANI, di p. VIII-250, 266 fig. e 50 tavole . . . . 3 —
Fabbro ferraio (Manuale del), di G. BELLUOMINI, 3ª ediz. di p. VIII-242 e 233 inc. 2 50
Fagiani. Razze, allevamento, di C. BELTRANDI, di p. VIII-182 e 26 fig. 2 50
Falconiere moderno, di G. E. CHIORINO, di p. XV-247, 15 tav. e 80 illustr. . . . . 6 —
Falegname (Il), J. ANDREANI, 2ª ed. p. 309, 264 fig., 25 tav. 4 —
Falegname ebanista, di G. BELLUOMINI, 6ª ediz., di pag. XVI-230 con 120 incisioni 5 50
Farfalle (Le), di A. SENNA. 24 tav. e testo di pag. 195 . 8 —
Farmacista (Man. del), di P. E. ALESSANDRI, 4ª ediz. di p. 984 . . . . 10 50

L. c.

Farmacologia e Formulario, di P. PICCININI, di p. VIII-382 . . . . 3 50

Fecola. Sua fabbricazione e trasformazione in destrina, glucosio, ecc., di N. ADUCCI, di p. XVI-285, con 41 fig. 3 50

Fermentazioni e fermenti, di R. GUARESCHI, di p. XI-350 . . . . 4 —

Ferrovie e Tramvie. Costruzioni, Materiali, Esercizio, Tecnologie dei trasporti, di P. OPPIZZI, di pagine XXII-1067 con 414 incisioni . . . . 15 —

Ferrovie e Tramvie (I più recenti progressi della tecnica nelle) di P. OPPIZZI, di pag. XIX-291, e 124 inc. 5 50

Ferrovie — vedi: Automobili - Macchinista - Strade ferrate - Trazione ferroviaria - Trazione a vapore - - Trasporti e tariffe - Vocabolario tecnico vol. V e VI.

Fiammiferi e fosforo, di C. A. ABETTI, di p. XII-172, e 5 av. 3 50

Fieni dei prati stabili italiani di A. PUGLIESE, con prefazione di G. LO PRIORE, di pag. XII-418 . . . . 4 50

Figure grammaticali a complemento della grammatica, di G. SALVAGNI, di p. VII-308 . . 3 —

Filatura del cotone, di G. BELTRAMI, di p. XV-558 e 196 inc. (in ristampa).

Filatura e torcitura della seta, di A. PROVASI, di p. VII-281 e 75 fig. 3 50

Fillossera (La) della vite. Risultati dei nuovi studi italiani, di R. GRANDORI, di pag. XVI-256 e 17 tavole. 3 —

Fillossera e malattie crittogamiche della vite, di V. PEGLION, di p. VIII-302 e 39 fig. . . . 3 —

Films — vedi: Cinematografo.

Filologia classica, greca e latina, di V. INAMA, 2ª ediz., di p. XVI-222 . . . . 1 50

Filonauta (Navigazione da diporto), di G. OLIVARI, di p. XVI-286 . . . . 2 50

Filosofia del diritto, di A. GROPPALI, (in ristampa)

Filosofia morale, di L. FRISO, 3ª ediz., di p. XVI-380 4 50

Filosofia — vedi ai singoli titoli: Dizionario di scienze filosofiche - Estetica - Etica - Evoluzione - Logica - Psicologica.

Finanze (Scienza delle), T. CARNEVALI, 2ª ed., p. IV-173 1 50

Fiori — vedi: Floricoltura - Garofano - Giardiniere - Orchidee - Orticoltura - Piante e fiori - Rose.

Fiori artificiali, di O. BALLERINI, 2ª ed. di p. XVI-368, con 246 figure 2 50

Fisica, di O. MURANI 10ª ed. accresciuta (in ristampa).

Fisica cristallografica, di W. VOIGT, trad. di A. SELLA, di p. VIII-392 . . . . 3 —

Fisica medica. (Fisiologia - Clinica - Terapeutica), di G. P. GOGGIA, pag. XII-954, 300 inc. e una tav. a colori 11 —

Fisiologia, di M. FOSTER, trad. di G. Albini, 4ª ediz. di p. VII-223 e 35 (in ristampa).

Fisiologia vegetale, L. MONTEMARTINI, p. XVI-230 1 50

Fisionomia e mimica, di G. CERCHIARI, di p. XII-335, 77 inc. e 38 tav. 4 50

Flora delle Alpi, illustrata di O. PENZIG, 2ª ed., di pag. XX-136 con 43 tavole in cromo . . . 8 —

Floricoltura, di G. RODA. 7ª ediz., di p .296 con 128 inc. 5 50

L. C.

Flotte moderne, E. BUCCI DI SANTA-FIORA, p. IV-204 5 —

Fognatura biologica (depurazione delle acque luride), di F. LACETTI, di pag. XII-376 . . . . . . 5 —

Fognatura cittadina, D. SPATARO, (esaurito).

Fognatura domestica, di A. CERUTTI, di p. VIII-421 e 200 fig. (esaurito).

Fondazioni delle opere terrestri e idrauliche e notizie sui sistemi più in uso in Italia, di R. INGRIA, di pag. XX-674 con 409 incisioni . . . 7 50

Fonditore in metalli, di G. BELLUOMINI, 5ª ediz., di A. HASSENZ di pag. 214, con 126 incisioni . . . 3 —

Fonologia italiana, di L. STOPPATO (esaurito).

Fonologia latina, di S. CONSOLI di pag. 208 . 1 50

Fonologia romanza, di P. E. GUARNERIO, di p. 666 12 50

Foreste — Vedi Prontuario del forestale

Formole e tavole per il calcolo delle risvolte ad arco circolare, di F. BORLETTI, di p. XII-69 . . . . 2 50

Formulario scolastico di matematica elementare (aritmetica, algebra, geometria, trigonometria), di M. A. ROSSOTTI, 3ª ediz. riveduta di p. XII-201 3 50

Forno elettrico (La pratica del) di A. TIBURZI, di pag, 270, con 70 incisioni 6 50

Fosfati e concimi fosfatici, A. MINOZZI, (in rist.).

Fotocromatografia, di L. SASSI, p. XXI-138 e 19 fig. 2 —

Fotografia (i primi passi in), di L. SASSI, 4ª ediz. ampliata di pag. XII-367 con 200 incisioni e 20 tavole . 4 —

Fotografia industriale, di L. GIOPPI, di p. XIII-208, con 12 inc. e 5 tav. 3 50

Fotografia pei dilettanti. (Come dipinge il sole). di C. MUFFONE, 8ª ediz., di p. 540, con 420 inc. e tav. 12 —

Fotografia a colori. Immagini fotografiche a colori ottenute con sviluppi e viraggi su carte all'argento e su diapositive, di L. SASSI, di pag. XVI-153 . . . 2 —

Fotografia a colori — vedi Autocromista.

Fotografia ortocromatica, di C. BONACINI, di p. XVI-227, 83 fig. e 5 tav. 3 50

Fotografia senza obiettivo, di L. SASSI, di p. XVI-135, 127 inc. e 12 tav. 2 50

Fotografia turistica, di T. ZANGHIERI, di p. XVI-279, 84 inc. e 18 tav. 3 50

Fotografia — vedi: Arti grafiche - Autocromista - Carte fotog. - Dizionario fotog. - Fotocromatografia - Fotogr. industriale - Fotogr. ortocromat. - Fotogr. per dilettanti - Fotogr. senza obiettivo - Fotogr. turistica - Fotogrammetria - Fotominiatura - Fotosmaltografia - Primi passi in fotografia - Processi fotomeccanici - Proiezioni - Ricettario fotogr.

Fotogrammetria, fototopografia e applicazioni, di P. PAGANINI, di pag. XVI-288, 200 fig. 3 50

Fotometria (Trattato di), di A. COACCI, di p. 257, con 87 figure 3 50

Fotominiatura, di F. TUCCARI, pag. X-136 e 33 tav. 3 50

Fotosmaltografia applicata, di A. MONTAGNA, di p. VIII-200 e 16 inc. . . . . 2 —

Fresatore e tornitore meccanico, di L. DUCA, 4ª ediz. ampliata, di pag. 236, con 31 inc. . . . 3 50

L. c.

Frumento. Come si coltiva, di E. Azimonti, 3ª ediz., di pag. XVI-311, con 88 incisioni e 12 tavole . 3 —

Frutta minori. Fragole, poponi, ecc., di A. Pucci, di pag. VIII-193 e 96 inc. 2 50

Frutticoltura, di D. Tamaro. 7ª edizione riveduta e ampliata, di pag. 260 con 103 incisioni 5 50

Fulmini e parafulmini, di G. Canestrini, di pag. VIII-166 (2ª edizione in corso di stampa).

Funghi mangerecci e velenosi. di F. Cavara, 2ª ediz. ampliata, di pag. 254 con 56 tavole . . . 15 —

Furetto. Allevamento e ammaestramento, di G. Licciardelli, di p. XII-172 e 39 fig. 2 50

Funzioni analitiche, di G. Vivanti, di p. VIII-432 4 50

Funzioni ellittiche, di E. Pascal, (in ristampa).

Funzioni poliedriche e modulari, di G. Vivanti, di p. VIII-437 . . . . 4 50

Galvanizzazione, pulitura e verniciatura dei metalli, di F. Werth, 3ª edizione rifatta, di pag. XXVII-700, con 309 incisioni. . . . . . . 9 —

Galvanoplastica in rame, argento, oro, ecc. di F. Werth, 2ª ediz., di p. XIV-333, con 167 inc. . 5 —

Galvanostegia, di I. Ghersi. 2ª ediz., rifatta da P. Conter, di p. XII-383 (in ristampa).

Garofano (Dianthus). Coltura e propagazione, di G. Girardi e A. Nonin, di p. VI-179, con 98 inc. e 2 tav. 2 50

Gastronomo moderno (Il), di E. Borgarello, con 200 Menus, di p. VI-411 . . . . 3 50

Gaz illuminante (Industria del), di V. Calzavara, di p. XXXII-672 e 375 fig. (esaurito)

Gelati, dolci freddi, bibite refrigeranti, conserve di frutta, di G. Ciocca, di pag. XIX-220 con 146 illustrazioni 4 50

Gelsicoltura, di D. Tamaro, 2ª ediz. (in ristampa).

Geografia, di G. Grove, trad. di G. Galletti. 2ª ed., di p. XII-160 e 26 fig. 1 50

Geografia classica, di H. Tozer, trad. di I. Gentile, 5ª ediz., di p. IV-168 . . . . 1 50

Geografia commerciale economica universale, di P. Lanzoni, 5ª ediz. (in ristampa).

Geografia economica sociale d'Italia, di A. Mariani, di p. XXVIII-477 . . . . 4 50

Geografia fisica, di A. Geikie, trad. di A. Stoppani, 3ª ediz., di p. IV-132 e 20 inc. (esaurito).

Geologia, di A. Geikie, trad. di A. Stoppani, 5ª ediz., a cura G. Mercalli, di p. XII-180 e 49 inc. . . . . 3 —

Geologo (Il) **in campagna e nel laboratorio,** di L. Seguenza, di p. XV 305 3 —

Geometria analitica. I. Il metodo delle coordinate, di L. Berzolari, 2ª ediz., di pag 510 con 51 inc. . 9 —

Geometria analitica, II. Curve e superficie del secondo ordine, di L. Berzolari, di pag. 439, con 19 inc. 3 —

Geometria descrittiva (Elementi di), di C. Ranelletti, di pag. XII-197, con 141 incisioni (in rist.).

Geometria descrittiva (Applicazioni di), di C. Ranelletti, di pag. XII-201, con 133 figure . . . . 3 —

L. C.

Geometria descrittiva (Metodi della), di G. LORIA, 2ª ediz. di p. 373 con 121 figure . . . . . . 6 —
— vedi. Poliedri, curve e superficie, di G. LORIA, di p. XVI-231 . . . . 3 —
Geometria elementare (Complementi), di C. ALASIA, di XV-244 e 117 fig. 1 50
Geometria e trigonometria della sfera, di C. ALASIA, di p. VIII-208 e 34 fig. 1 50
Geometria metrica e trigonometria, di S. PINCHERLE 8ª ediz., di p. IV-160 . . . . 3 —
Geometria pratica, di E. EREDE, 4ª ediz., di p. XVI-258 e 34 inc. 1 50
Geometria proiettiva del piano e della stella, di F. ASCHIERI, 2ª ediz. (esaurito).
Geometria projettiva dello spazio, di F. ASCHIERI, 2ª ediz., di p. VI-264 e 16 fig. 1 50
Geometria pura elementare, di S. PINCHERLE, 8ª ediz., di p. VIII-176, con 121 fig. . . . . . . 3 —
Geometria elementare (Esercizi), di S PINCHERLE, 2ª ediz. di p. VIII-136, con 50 fig. 1 50
Geometria elementare. Problemi e metodi per risolverli, di I. GHERSI, 2ª ediz. con 311 problemi e esercizi, di pag. VI-271 e 185 figure 2 50
Gesu (Vita di), di L. ASIOLI, 2ª ediz. riveduta, con una carta topografica della Terra Santa, di pag. XII-253 . 4 —
Giacimenti minerali e acque sotterranee (Ricerca dei), di M. GROSSI, di pag. XVI-380. . . 4 50
Giardiniere (Il libro del), di A. PUCCI, 2 volumi:
I. Il giardino e la coltura dei fiori, 2ª ediz., di pagine XI-317 e 144 incisioni (in ristampa).
II. La coltivazione delle piante ornamentali da giardino, 2ª ediz., di p. VIII-325 e 186 inc. . . 5 —
Giardino infantile, di P. CONTI, di p. IV-213 e 27 tav. 3 —
Ginnastica (Storia della), di F. VALLETTI, di pag. VIII-184 . . . . 1 50
Ginnastica femminile, di F. VALLETTI, di p. VI-12 e 67 fig (in ristampa).
Ginnastica da camera, da scuola e palestra, di J. GELLI, 2ª ediz.. di p. VIII-168, con 253 fig. 2 50
Ioielleria, oreficeria, oro, argento e platino — v. ai singoli titoli: Orefice - Leghe metalliche - Metallurgia dell'oro - Metalli prez. - Saggiatore - Tav. alligaz.
Giuochi — vedi: Biliardo - Dama - Tennis - Scacchi.
Giuochi ginnastici per le scuole e per il popolo, di F. GABRIELLI, 2ª ediz., di pag. XXIII-217 con 24 illustrazioni 2 50
Giuochi sportivi. (Calcio (Foot-Ball) - Rugby - Water-Polo - Pallone - Palloncino - Tamburello - Tennis - Hockey - Trucco - Pilotta - Sfratto - Golf - Kriket e Vigoro - Bigliardo - Bocce), di G. FRANCESCHI. 2ª ediz. interam. rifatta del Manuale "Il giuoco del Pallone e gli altri affini", di p. XII-180, con 31 illustrazioni. . 3 50
Giurato (Manuale del), di A. SETTI, 2ª ediz., di p. 260 2 50
Giurisprudenza — vedi: Amministrazioni comunali - Avarie - Camera di Consiglio - Codici - Conciliatore - Curatore fallimenti - Digesto - Diritto - Economia - Finanze - Giurato - Giustizia - Leggi - Legislazione -

L. c.

Mandato commerciale - Notaio - Psicopatologia legale - Polizia giudiziaria - Prontuario tecnico legislativo - Ragion. - Socialismo - Strade ferr. - Testamenti.

Giustizia amministrativa (Principi fondamentali e procedura), di C. VITTA (esaurito).

Glicerina — vedi: Candele.

Glottologia, di G. DE GREGORIO, di p. XXXII-318 . 3 —

Gnomonica. L'orologio solare a tempo vero, di G. BOTTINO BARZIZZA, p. VIII-199, 33 inc. (sost. il LA LETA) . 2 50

Gomme, Resine, Gommo-resine e Balsami, di L. SETTIMI, di p. XVI-373 e 17 fig. 4 50

Grafologia, di C. LOMBROSO, (esaurito).

Grammatica albanese, di V. LIBRANDI, p. XVI-200 3 —

Grammatica albanese — vedi Albanese parlato.

Grammatica catalana con esercizi pratici e Dizionario di G. FRISONI, di pag. XXIV-279 . . . 3 —

Grammatica croato-serba, G. ANDROVIC, (esaur.)

Grammatica danese-norvegiana, di G. FRISONI, di p. XX-488 . . . . 4 50

Grammatica ebraica, di I. LEVI fu I. 2ª edizione, di pag. IV-200 . . . . 2 50

Grammatica egiziana antica, geroglifica, di G. FARINA di p. VIII-185 . . . . . . 4 50

Grammatica francese, G. PRAT, 5ª ed., di pag. 232 3 —

Grammatica galla (Oromonica), di E. VITERBO, 2 vol.
I. Galla-italiano, di p. VIII-152 . . . . . 2 50
II. Italiano-galla, di p. LXIV-106 . . . . . 2 50

Grammatica greca, di V. INAMA, 2ª ed. (in ristampa)

Grammatica del greco-moderno, di R. LOVERA, 2ª ediz., di p. VI-220 (in ristampa).

Grammatica inglese, L. PAVIA, 4ª ediz. di pag. 288 3 —

Grammatica italo-Araba con vocabolario comparativo tra l'Arabo letterario e il Dialetto libico, di G. SCIALHUB, di pag. XVI-389 . . . . 7 —

Grammatica italiana, di C. CONCARI, rifatta da G. B. MARCHESI, 4ª ediz., riveduta e corredata di esercizi di applicazione del Prof D. FERRARI, di p. VIII-201 3 —

Grammatica italiana (Regole ed esercizi di), per le scuole secondarie, di D. FERRARI, 2ª ediz., di p. 272 3 —

Grammatica latina, L. VALMAGGI, 2ª ed. (in rist.)

Grammatica magiara, di A. ALY-BELFADEL, di p. XIX-332 . . . . 3 —

Grammatica olandese, di M. MORGANA, p. VIII-224 3 —

Grammatica persiana, A DE MARTINO, p. VI-207 3 —

Grammatica portoghese-brasiliana, di G. FRISONI, 3ª ediz., di p. XVI-356 . . . . . . 3 50

Grammatica provenzale, di E. PORTAL, di pagine VIII-232 . . . . 1 50

Grammatica della lingua romena, R. LOVERA, 3ª ed. con l'aggiunta di modelli di lettere e di un vocabolario delle voci più usuali, di pag VIII-211 . . 2 50

Grammatica russa di VOINOVICH (esaurito).
— vedi anche: Lingua russa - Vocabolario russo.

Grammatica serba di B. GUYON, di pag. 624 . . 12 50

Grammatica slovena, di B. GUYON, 2ª ediz. ampliata, di pag. 363 . . . . 5 50

Grammatica somala. Elementi di Somalo e di Ki-

L. c.

Suahili parlato al Benadir, di E. CARCOFORO di pagine VIII-154 . . . . 2 50
Grammatica spagnuola, di L. PAVIA, 4ª ediz., di pag 243 . . . . 3 —
Grammatica storica della lingua e dei dialetti italiani, di F D'OVIDIO e G. MEYER-LÜBKC, trad. di E. Polcari 2ª ediz. di pag. 312 . . . . . 6 50
Grammatica svedese, di E PAROLI, di p. XV-293 3 —
Grammatica tedesca, L. PAVIA, 4ª ed. di p. XX-296 3 —
Grammatica turco-osmanli, di L. BONELLI, di p VIII-200 (esaurita).
Granicoltura, con un'appendice riguardante il Frumento "Carlotta Strampelli„ di A. DE ROSA, di pagine XII-300 con 24 illustrazioni. 7 50
Gravitazione. Spiegazione delle perturbazioni solari, di G. B. AIRY, trad. F. PORRO, di p. XXII-176 e 50 fig. 1 50
Grecia antica — vedi: Antichità greche - Archeologia - Atene - Cultura greca - Mitologia greca - Monete greche - Storia antica.
Greco moderno — vedi: Conversazione ital.-neoellenica - Crestomazia - Grammatica Dizionario.
Gruppi continui di trasformazioni, di E. PASCAL, di p. XI-378 . . . . . . 3 50
Guida numismatica universale, di F. GNECCHI, 4ª ediz., di p. XV-612 (in ristampa).
Humus. Fertilità e igiene dei terreni, di A. CASALI, di p. XVI-210 . . . . 2 —
Idraulica, di E. ZENI, 2ª ediz. rifatta del Manuale di T. Perdoni, di p. XXXI-480, 290 fig. (in ristampa).
— vedi: Fondaz. terrestri e idrauliche - Sistemaz. torrenti.
Idraulica fluviale, di A VIAPPIANI, p. XI-259, 92 fig. 4 50
Idraulica fluviale pratica con esempi, di A. VIAPPIANI, di pag. 343, con 120 incisioni . . . 8 50
Idrobiologia applicata, di F. SUPINO, di pag. 290 con 134 incisioni 3 50
Idroterapia, di G. GIBELLI, di p. IV-238 e 30 inc. . 2 —
Igiene della bocca e dei denti, di L. COULLIAUX, di p. XVI-330 e 23 fig. (in ristampa).
Igiene del lavoro, di A. TRAMBUSTI e G. SANARELLI, di p. VIII-262 e 70 inc. 2 50
Igiene della mente e dello studio, di G. ANTONELLI di p. XXIII-410 . . . . . 3 50
Igiene dell'orecchio e profilassi della sordità, di S. MONSELLES, di pag. 145 . . . . . . 4 50
Igiene ospedaliera, di C. M. BELLI:
Vol. I. - Costruzioni degli Ospedali-Ospizi e stabilimenti affini, di pag. VII-503, con 253 incisioni . . 6 50
Vol. II. - Ordinamento dei servizi negli ospedali, di pag. 366, con 167 incisioni . . . . . 5 —
Igiene della pelle, di A. BELLINI, (in ristampa).
Igiene del piede e della mano. Pedicure e manicure, di G. ANTONELLI, di p. XVI-459 e 33 fig. . . 5 50
Igiene della vita pubblica e privata, di G. FARALLI (in ristampa).
Igiene privata e medicina popolare, di C. BOCK. 3ª ediz. ital. di G. GALLI, di pag. XVI-303 . . 3 50
Igiene rurale, di A. CARRAROLI, di p. X-470 . . 4 50

L. c.

Igiene scolastica. di A. REPOSSI 2ª ediz., p. IV-246 2 —
Igiene della scuola e dello scolaro, di M. RAGAZZI, di pag XII-386 . . . 4 50
Igiene sessuale ad uso dei giovani e delle scuole, di G. FRANCESCHINI, 2ª ediz. di p. XII-192 3 50
Igiene del sonno, di G. ANTONELLI, di p. VI-224 . 3 —
Igiene veterinaria, di U. BARPI, di p. VIII-221 . 2 —
Igiene della vista, di A. LOMONACO, di p. XII-272 . 2 50
Igienista (Manuale dell'), ad uso degli Ufficiali sanitari, studenti, ecc., dei dott. C. TONZIG e G. Q. RUATA, di p. XII-374 e 243 fig. . . . . 5 —
Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, di P. CANTONI, di p. XII-142 e 24 fig. 1 50
Illuminazione elettrica. Impianti ed esercizii, di E. PIAZZOLI, 6ª ediz., p. XII-955, 468 fig. (in ristampa).
Imbalsamazione umana, di F. DI COLO, di p. X-174 e 15 fig. 2 50
— vedi: Naturalista preparatore.
Imbianchino decoratore, D. FRAZZONI, p. X-193 3 50
Imenotteri, neurotteri, pseudoneurotteri. ortotteri e rincoti, di E. GRIFFINI, di p XVI, 687 e 243 fig. 4 50
Imitazione di Cristo, di G. GERSENIO, volgarizzazione di C. GUASTI e note di G. M. ZAMPINI, 2ª ediz. di pag. L-462 (in ristampa).
Imitazioni — vedi Prodotti e procedimenti nuovi.
Immunità e resistenza alle malattie, di A. GALLI-VALERIO, di p. VIII-218 . . . . . . 1 50
Impianti elettrici a correnti alternate, di A. MARRO. 3ª ediz., di pag. XLVIII-862, con 379 incisioni e 81 tabelle (in ristampa).
Imposte dirette. Riscossione, ecc., di E. BRUNI, di p. VIII-158 . . . . 1 50
Incandescenza a gaz. Fabbricazione reticelle, di L. CASTELLANI, di p. X-140 e 33 inc. . . . . . 2 —
Inchiostri da scrivere, R. GUARESCHI, p. VIII-162 3 50
Industria frigorifera, di P. ULIVI, 2ª ediz., di p. XVI-272 e 74 fig. . . . . 4 —
Industria dei saponi — vedi: Saponi.
Industria tartarica, di G. CIAPETTI, di p. XV-276 e 52 fig. . . . . 3 —
Industria tessile. Analisi e fabbricazione dei tessuti tinti in filo e tinti in pezza, di F. Fachini, di pagine XII-211, con 30 incisioni 2 50
Industria tintoria, di M. PRATO, p. XXI-292, e 7 fig. 4 50
Industrie (Piccole), di I. GHERSI, 3ª ediz., di p. XII-388 4 50
Infanzia – v. Rachitide - Malattie dell' - Giardino infan. - Nutrizione - Ortofrenia - Posologia - [illegible] domuto.
Infermieri (Istruzioni per gli) — vedi: Assistenza.
Infezione — vedi: Disinfezione - Medicatura antisettica.
Infortuni sul lavoro. (Mezzi tecnici per prevenirli, di E. MAGRINI, di pag. 285 con 257 incisioni. . . 3 —
Infortuni in montagna. Manuale per gli alpinisti, di O. BERNHARD, trad. R Curti, di p. XVII-60, e 55 tav. 4 50
Ingegnere civile e industriale (Manuale dell') di G. COLOMBO, con la collaborazione dei Proff. Ingg.

L. c.

C. I. Azimonti, M. Baroni, G. Belluzzo e G. Semenza (107° a 115° migliaio), di pag. 560, con 259 fig. e 7 tav. 12 50
— Id. Edizione speciale su carta oxford . . . . . 15 —
Ingegnere costruttore meccanico, di G. MALAVASI, 3ª ediz. di pag. XXXIV-862 (in ristampa).
Ingegnere elettricista, di A. MARRO, 2ª ediz., di XXXV-862 e 254 fig. (in ristampa).
Ingegnere navale, di A. CIGNONI, di pag. 324 e 36 fig. 5 50
Insegnamento dell'italiano, di G TRABALZA, di p. XVI-254 . . . . 1 50
Insetti dellecase e dell'uomo e malattie che diffondono, con riguardo al modo di difendersene nelle città, nelle campagne, al fronte, di A, BERLESE, p. XII-293, con 100 inc. 4 50
Insetti nocivi all'agricoltura e alla selvicoltura, di C. CRAVERI, di pag. X-481, con 229 fig. 5 —
Insetti utili, di F. FRANCESCHINI, p. XII-160 (esaurito).
Interesse e sconto, di E. GAGLIARDI, (in ristampa).
Invecchiamento artificiale dei vini, aceti e spiriti di A. DURSO-PENNISI, di pag. 185, con 35 inc. . 2 50
Inventore (Guida dell'), di I. GHERSI. Consigli, istruzioni, leggi, di pag. XII-511 . . . . 5 —
Invenzioni utili (Piccole), di S. PAOLETTI, di p. XVI-252 e 156 fig. 3 50
Ipoteche (Man. per le), di A. RABBENO (in ristampa).
Islamismo, di I. PIZZI, di p. VIII-494 . . . . . 3 —
Italia dialettale di G. BERTONI, di pag. 257 . . . 4 50
Ittiologia italiana, di A. GRIFFINI, di p. 487 e 244 fig. 5 50
Jucche (Le), di G. MOLON, di pag. VIII-247, con 53 tavole in nero e 8 colorate 6 50
Laminazione del ferro e dell'acciaio, di M. BALSAMO, di p. VIII-139, 50 fig. e 5 tav. . . . 3 50
Laterizi, di G. REVERE, di p. XII-298 (in ristampa).
Latino volgare (Il), di C. H. GRANDGENT, traduzione di N. MACCARONE, di pag. XXIV-298. . . . . . 3 —
Latte e latterie sociali cooperative, di E. REGGIANI, di p. XII-444, con 96 fig. . . . . . . 5 —
Lavorazione dei metalli, di C. ARPESANI, 2ª ediz. rinnovata, di pag. XVI-603, (in ristampa).
Lavorazione dei legnami, di C. ARPESANI, 2ª ediz. di pag. VIII-161, con 181 incisioni 3 50
Lavori femminili, di T. e F. ODDONE, di p. VIII-543, 822 inc. e 48 tav. . . . . 7 —
Lavori femminili — v. Abiti per signora Biancheria - Macchine da cucire - Monogrammi - Trine a fuselli.
Lavori marittimi e impianti portuali, di F. BASTIANI, di p. XXIII-424, con 209 fig. 6 50
Lavori in terra, di B. LEONI di p. XI-305 e 38 fig. 3 —
Lavoro donne e fanciulli. Legge, regolamento con note di E. Noseda, di p. XV-174 . . . . . 1 50
Lawn-Tennis — vedi: Tennis.
Lectures françaises et themes italiens, di J. PRAT, di pag. VI-158 . . . . 1 50
Legatore di libri, di G. G. GIANNINI, 2ª ediz. ampliata, di pag. 263, con 27 tavole di cui 2 a colori . 5 50
Legge comunale e provinciale, annotata da E. MAZZOCCOLO. 7ª ediz. (in corso di stampa).

L. C.

Legge elettorale politica (La nuova), accuratamente riveduta sul testo ufficiale 0 50
Legge sugli infortuni sul lavoro, di A. SALVATORE, di p. 312 . . . . 3 —
Legge sui lavori pubblici e regol., di L. FRANCHI, di p. IV-110-XLVIII (esaurito).
Legge Notarile (La nuova) e Regolamento Settembre 1914, commentata da E. BRUNI, di pag. XII-571 . . . 4 50
Legge sull'ordinamento giudiziario, di L. FRANCHI, di p. IV-92-CXXVI 1 50
Leggende popolari, di E. MUSATTI, 3ª ediz., di p. VIII-181 . . . . 1 50
Leggi — vedi: Codici.
Leggi sulla sanità e sicurezza pubblica, di L. FRANCHI, di p. IV-108-XCII (esaurito).
Leggi sulle tasse di registro e bollo, di L. FRANCHI, di p. IV-124-CII (esaurito).
Leghe metalliche ed amalgame, di I. GHERSI, 2ª ediz., di p. XII-433 e 22 figure 5 50
Legislazione agraria italiana Codice della) di E. VITA, di pag. XXVII-718 . . . . 8 —
Legislazione sulle acque, di D. CAVALLERI, di p. XV-274 . . . . 2 50
Legislazione rurale, di E. BRUNI, 3ª ediz., di p. XII-450 . . . . 4 50
Legislazione sanitaria italiana, di E. NOSEDA, di p. VIII-570 . . . . 5 —
Legnami indigeni ed esotici. Usi e provenienze, di O. FOGLI, di p. VIII-197, con 37 fig. 2 50
Lepidotteri italiani, di A. GRIFFINI, di p. XIII-248, con 149 fig. . . . . 3 —
Letteratura albanese, di A. STRATICÒ, di pag. XXIV-280 . . . . 3 —
Letteratura americana. di G. STRAFFORELLO, di p. 158 . . . . 1 50
Letteratura araba, di I. PIZZI, di p. XII-388 . . 3 —
Letteratura assira, di B. TELONI, di p. XV-266 3 —
Letteratura bizantina (Storia della) (324-1453) di G. MONTELATICI, di pag. VIII-292 . . . . . . 3 —
Letteratura drammatica, di C. LEVI, di pag. XII-339 . . . . 4 50
Letteratura ebraica, 2 volumi, di A. REVEL, di p. 364 . . . . 3 —
Letteratura egiziana, di L. BRIGIUTI, (in lavoro).
Letteratura francese, dalle origini ai nostri giorni, di G. PADOVANI, di pag. XX-525 . . . . 4 50
Letteratura e crestomazia giapponese, di P. ARCANGELI, di pag. XVI-299 . . . . 3 50
Letteratura greca, di V. INAMA, 18ª ediz. ampliata ed in parte rifatta da D. BASSI e E. MARTINI, p. XVI-316 3 —
Letteratura indiana, di A. DE GUBERNATIS, di p. VIII-159 (esaurito).
Letteratura inglese, di F. A. LAING e I. CORTI, di pag. VIII-208 . . . . 3 —

L. C.

Letteratura italiana, di G. Fenini, 6ª ediz. rifatta da V. Ferrari, di p. XII-268 (in ristampa).

Letteratura italiana moderna e contemporanea, di V. Ferrari. 3ª ediz., di p. VIII-340 . 3 —

Letteratura italiana. Insegnamento pratico, di A. De Guarinoni, di p. XIX-336 . . . . . . 3 —

Letteratura norvegiana, di S. Consoli, di p. 288 1 50

Letteratura persiana, di I. Pizzi, di p. X-208 1 50

Letteratura provenzale moderna, di E. Portal, di p. XVI-221 . . . . 1 50

Letteratura romana, di F. Ramorino, 8ª ediz. di p. VIII-349 (in ristampa).

Letteratura rumena, di R. Lovera, di p. X-199 . 1 50

Letteratura spagnuola, di B. Sanvisenti, di p. XVI-202 . . . . 3 —

Letteratura tedesca, di O. Lange, 3ª ediz. ital. di R. Minutti (in ristampa).

Letteratura ungherese, di Zigany-Arpad, di p. XII-205 . . . . 1 50

Letteratura universale, di P. Parisi, di pag. 399 3 —

Letterature slave, di D. Ciampoli, 2 vol.
I. Bulgari Serbo-Croati, Jugo-Russi, di p. IV-144 1 50
II. Russi Polacchi, Boemi, di p. IV-142 1 50

Lignite, legno e torba, di G. Malatesta e G. Guardabassi, di pag. 406, con 92 fig. nel testo. . . . 7 50

Lettura delle carte topografiche, di A. Ferrari, di pag. XII-365, con 98 incisioni e 10 tavole . 5 50

Limnologia. Studio dei laghi, di G. P. Magrini, di p. XV-212 e 53 fig. . . . . 3 —

Lingua cinese parlata, di F. Magnasco, di p. 130 2 —

Lingua giapponese parlata, di F. Magnasco, di p. XVI-110 . . . . 2 50

Lingua gotica, di S. Friedmann, di p. XVI-333 3 —

Lingua italiana — vedi: Arte del dire - Corrispondenza - Dialetti - Enciclopedia Hoepli - Figure grammaticali - Grammatica - Insegnamento d. italiano - Italia dialettale - Morfologia - Ortoepia - Retorica - Ritmica - Verbi italiani - Vocabolario ital.

Lingua latina — vedi: Abbreviature latine - Ape latina - Epigrafia - Esercizi - Filologia classica - Fonologia - Grammatica - Latino volgare - Letteratura romana - Metrica - Sinonimi lat. - Verbi.

Lingua russa. Grammatica ed esercizi, di P. G. Sperandeo, 4ª ediz. di p. IX-274 . . . . . 4 —
— vedi: Vocabolario russo e italiano

Lingua spagnuola. Cinquanta lezioni pratiche, di G. Frisoni, di pag. 460. . . . . 9 50

Lingue dell'Africa, di C. Cust, trad. di A. De Gubernatis, di p. IV-110 . . . . . 1 50

Lingue germaniche — vedi: Grammatica danese-norvegiana, inglese, olandese, tedesca, svedese.

Lingue neo-elleniche — vedi: Conversazione - Crestomazia - Dizionario greco mod.

Lingue slave — vedi Grammatica croato-serba, Grammatica slovena, Grammatica albanese, L'albanese parlato.

Lingue neo-latine, di E. Gorra. (2ª ediz. in lavoro).

L. C.

Lingue straniere, di C. MARCEL, trad. di G. DAMIANI, di p. XVI-136 . . . 1 50

Linguistica — vedi Grammatica storica della lingua Figure (Le) grammaticali - Verbi italiani.

Liquorista, di A. CASTOLDI, 2000 ricette pratiche, 3ª ediz. rifatta del Man., A. Rossi, pag. XVI-731 e 19 inc. 9 —

Litografia, di C. DOYEN, di p. VIII-261 (in ristampa).

Livellazione pratica, di A. VEGLIO, p. X[illegible] 2 —

Locomobili e trebbiatrici. Note per Ispettori e conduttori, di L. CEI. 4ª ediz. di pag. 478, con 246 inc. 9 50

Logaritmi a 5 decimali, di O. MÜLLER, 15ª ediz. a cura di M. RAINA. di p. XXXVI-191 . . 3 —

Logica, di W. . JEVONS, trad C. CANTONI. 5ª ediz., di p. VIII-156, con 15 fig. 1 50

Logica matematica, di C. BURALI-FORTI, 2ª ediz. interamente rifatta, di pag. 515. . . . . 1 50 / 9 50

Logismografia, di C. CHIESA, 4ª ediz. con note del prof. A. MASETTI, di p. XV-196 . . . . . . 1 50

Lotta greco-romana con cenni storici sulla Storia della lotta, di A. COUGNET, di pag. VIII-490 con 168 fotografie di celebri lottatori e 126 figure nel testo. . 5 50

Lotte libere moderne. Svizzera, Islandese, Giapponese, Americana, Turca, di A. COUGNET, di pagine XXIV-223, con 190 incisioni 3 50

Luce e colori, di G. BELLOTTI. (2ª ediz. in lavoro).

Luce e suono, di E. JONES, trad. di U. Fornari, di p. VIII-336 e 121 inc. . . . . 3 —

Luce e salute. Fototerapia e radioterapia, di A. BELLINI, di p. XII-362 e 65 fig. 9 50

Macchine e caldaie (Atlante di), S. DINARO, di pagine XV-80, con 112 tav. e 170 fig. (in ristampa).

Macchine (Il montatore di) di S. DINARO, 2ª ediz. di p. XVI-502 e 62 incis. . . . 4 —

Macchine agricole, ad uso degli agricoltori, di A. CENCELLI e G. LOTRIONTE. 2ª edizione rifatta, di pagine XXIV-803 con 370 figure. 16 50

Macchine elettriche — vedi Avvolgimenti delle.

Macchine per cucire e [illegible], di A. GALASSINI, d p. VII-230 e 100 fig (in ristampa).

Macchine utensili moderne (I problemi pratici delle), di S. DINARO, di pag. XVI-157 . . . . 3 50

Macchine a vapore e Turbine a vapore, di H. HAEDER e E. WEBBER. 2ª ed. ital., p. XX-627 e 1822 incis. 10 —

Macchinista e fochista, di [illegible] RIA, 15ª ed. rifatta da C. Malavasi, di p. 502, con 249 inc 8 50

Macchinista navale e Costruttore Meccanico di E. GIORLI, 2ª ed. rifatta, di pag. 591 e 350 fig. 10 50

Macelli moderni. Conservazione delle carni, di F. A. PESCE di p. XV-510 e 73 fig. . . 6 50

Madreperla. Suo uso nella industria e nelle arti, di E. ORILIA, di p. VIII-258, 40 fig. e 4 tav. 4 50

Magnetismo ed elettricità, di F. GRASSI, 4ª ed., di p. XXII 878, con 398 fig. e 6 tav. . . . . . 9 —

Magnetismo e ipnotismo, di G. BELFIORE, 5ª ed., di pagine VIII-465 . . . . 7 50

Maiale. Razze, riproduzione allevamento, di E. MARCHI. 3ª ediz. a cura C. PUCCI. di pag. XVI-602 e 103 inc. 7 50

L. C.

Maioliche e porcellane, di L. DE MAURI. 2ª ediz., di pag. XIV-843, con 430 incis., 43 tav e 3500 marche 12 50

Mais o granoturco. Coltivazione, di E. AZIMONTI. 2ª ediz., di p. XII-196 e 61 inc 2 50

Malaria e risaie in Italia, di G. ERCOLANI, di p. VIII-203 . . . . 2 —

Malattie degli animali utili all'agricoltura, di P. A. PESCE, di pag. XII-611 . . . . . . 5 50

Malattie crittogamiche delle piante erbacee, di R. WOLF, trad. di P Baccarini, di p. X-268 e 50 inc. . . . . 2 —

Malattie dell'infanzia, di G. CATTANEO, di pagine XII-506 . . . . 4 —

Malattie infettive degli animali, di U. FERRETTI, di p. XX-582 . . . . 4 50

Malattie dei lavoratori e igiene industriale, di G. ALLEVI, di p. XII-421 . . 3 50

Malattie mentali, di L. MONGERI, di p. XVI-263 con 26 tav. 4 50

Malattie dell'orecchio, del naso e della gola, di T MANCIOLI, di p XXIII-540 (in ristampa).

Malattie dei paesi caldi, di C. MUZIO, di p XII-582, con 154 fig. e 11 tav. 7 50

Malattie della pelle, di G. FRANCESCHINI, di pagine XVI-217 (in ristampa).

Malattie dei polli ed altri volatili, di P. A. PESCE, di p. XVI-297 e 50 incis. 3 50

Malattie del sangue. Ematologia di E. REBUSCHINI, di p. VIII-432 . . . . . . 3 50

Malattie sessuali, di G. FRANCESCHINI, 4ª ediz., di pag. 312 . . . . 6 50

Malattie e alterazioni del vino, di S CETTOLINI. 2ª ediz., di p. VIII-380 e 15 fig. . . . . 3 —

Malattie dei vini. Chiarificazione, di R. AVERNA-SACCÀ, di p. XII-400 e 23 fig. 3 50

Mandato commerciale, di E. VIDARI, di p. VI-160 1 50

Mandolinista (Man. del) di A. PISANI (2ª ediz. in corso di stampa).

Maniscalco pratico, di C. VOLPINI. Anatomia, ferratura, di p. XVI-398 e 193 fig. 6 50

Manzoni A., Cenni biografici di L. BELTRAMI, di p. 109, con 9 autografi e 68 inc. 1 50

Mare (Il) di V BELLIO, di p. IV-140 e 6 tav. . . 1 50

Maria (Vita di), di L. ASIOLI, pag. VIII-202 . . . 3 —

Marina – vedi: Attrezzatura navale - Bandiere - Capitano marittimo - Canottaggio - Ingegnere navale - Filonauta - Flotte moderne - Marine da guerra - Marino - Nautica stimata - Astronomia nautica - Codice di marina - Avarie e sinistri marittimi.

Marine da guerra del mondo al 1897, di L. D'ADDA, di p. XVI-320 e 77 ill. 4 50

Marino (Manuale del) Militare e mercantile, di G. DE AMEZZAGA, 2ª ediz. con appendice di E. B. di Santafiora, di p. VIII-438, con 18 silografie . . . 5 —

Marmista, di A. RICCI 2ª ediz., di p. XII-154 e 48 inc. 2 —

Massaggio, di R. MAINONI, p. XII-179 (2ª ed in lavoro).

Matematica attuariale, di U BROGGI, di p. XV-347 4 50

L. C.

— vedi: Scienza attuariale.

Matematica (Complementi di) ad uso dei chimici, di G. VIVANTI, di p. X-381 (in ristampa).

Matematica dilettevole e curiosa. Problemi, Giuochi, ecc., di I. GHERSI, di pag. 740 con 693 figure (in ristampa).

Matematiche — vedi: Algebra - Aritmetica - Astronomia - Calcolo Celerimensura - Compensazione errori - Computisteria - Contabilità - Cubatura - Legnami - Curve - Economia matematica - Equazioni integrali - Formolario - Gruppi di trasformazione - Interesse - Logaritmi - Logica matematica - Ragioneria - Storia della matematica - Trigonometria - Tracciamento curve - Triangolazioni.

Matematiche superiori (Repertorio di), di E. PASCAL. 2 vol.

I. Analisi, di p. XVI-642 (in ristampa).

II. Geometria e indice per i due vol., di p 950 . 9 50

Materia medica moderna, di G. MALACRIDA, di p. XI-761 (esaurito).

Materie grasse (Industria), I grassi e le cere, di S. FACHINI, di p. XIII-651 . . 8 —

Mattoni e pietre di sabbia e calce (Arenoliti), di E. STOFFLER e M. GLASENAPP, con aggiunte di G. Revere, di p. VIII-232, 85 fig. e 3 tav. (in ristampa).

Meccanica, di R. S. BALL, trad. I. Benetti, 6ª ed., riveduta e ampl. da C. MAVAVASI, di p. XVI-198 e 87 fig. 2 50

Meccanica agraria, di V. NICCOLI, 2 vol.

I. Lavorazione del terreno, 2ª ed. di p. 470 e 176 inc. 5 50

II Dal seminare al compiere la prima manipolazione dei prodotti, di p XII-426 e 175 fig (in ristampa)

Meccanica applicata (Man. elem. di) di F. MASSERO, per le offic. e scuole operaie. Pag. XX-434 con 371 inc. 7 50

Meccanica industriale nelle scuole e per l'officina, di S. DINARO, 2ª ediz. di p. 516 e 100 figure 6 50

Meccanica del macchinista di bordo, di E. GIORLI, di p. XIII-297 e 92 fig. 2 50

Meccanica razionale, di R. MARCOLONGO, 2 vol.

I. Cinematica - Statica, 2ª ediz. di p. XV-323, con 32 inc. 4 50

II Dinamica-Idromeccanica, 2ª ediz. di p. 420, con 23 incisioni . . . . . . 6 —

Meccanica (Tecnologia) – v.: Aeronautica - Aggiustatore - Appr. meccan. - Automobilista - Aviazione - Caldaie - Chauffeur - Costruzioni metalliche - Dinamica - Disegnatore meccanico - Disegno industriale - Fresatore - Ingegnere civile - Ingegnere costruttore meccanico - Lavorazione dei metalli - Locomobili - Macchine (Atlante di), (Montatore di) - Macchine utensili - Macchinista e fuochista - Macchinista navale - Meccanico - Meccanismi - Modellatore meccanico - Momenti di inerzia - Orologeria - Termodin. - Tornitore meccan.

Meccanico (Il), di E. GIORLI 8ª ed., pag. 570 e 355 inc. 9 50

Meccanico chauffeur — vedi Chauffeur.

Meccanico moderno (guida pratica del) di A. MASSENZ. Manuale teorico-pratico ad uso dei capi-officina ed alunni delle scuole ind. e d'arti e mestieri, meccanici, tornitori, fabbri. 2ª ediz. di pag. 452, con 414 inc. 9 50

L. C.

Medicamenti — vedi: Diabete melito - Droghe - Elioterapia - Farmacista - Farmacoter. - Materia med. - Medicatura - Med. d'urgenza - Med. prat. - Posologia Prodotti chimici organ. - Rimedi - Sieroterapia - Sifilide - Soccorsi urgenza - Specialità medicinali - Veleni.

Meccanismi (600). Dinam., Idraul., Pneumat., ecc., di T. BROWN. 6ª ed. ital a cura C. Malavasi, pag. 303 e 605 fig. 4 50

Medicatura antisettica, di A. ZAMBLER, con prefazione di E. Tricomi, di p. XVI-124 e 6 inc. . . . 1 50

Medicina d'urgenza, di E. TROMBETTA (esaurito).

Medicina legale militare, di E. TROMBETTA, di p. XVI-330 (esaurito)

Medicina sociale, di G. ALLEVI, di p. 400 . . . . 3 50

Medicina dello spirito, di C. GIACHETTI, pag. 235. 2 50

Medico (Il) a bordo e nei paesi tropicali, di R. RIBOLLA, di pag. XIX-326 . . . . 3 50

Medico pratico, di C. MUZIO, 4ª ediz., (in ristampa).

Membra artificiali (Vitalizzazione delle) di G. VANGHETTI, di pag. 241, con 137 figure 4 50

Merceologia tecnica, di P. ALESSANDRI. due vol.
Vol. I. Materie prime, p. XI-530, 142 tav. (in rist.)
Vol. II. Prodotti chimici, di p. 526, 83 tav. e 16 inc. 6 —

Merceologia e Istituzioni commerciali, di E. BIANCHI (in sostituzione del Manuale di LUXARDO) di pag. XVI-488 . . . . 5 50

Mesotorio (Il) nella cura di alcune dermatosi e neoformazioni maligne della pelle, di A. MASOTTI, di pag. 140, con 49 inc. nel testo . . . . 2 —

Metalli preziosi. Argento, oro, platino, di A. LINONE, di p. XI-315 . . . . 3 —

Metallocromia. Colorazione e decorazione dei metalli, di I. GHERSI, 2ª ediz., di pag. XVI-317 . . . . 5 —

Metallografia applicata ai prodotti siderurgici, di U SAVOIA, di p. XVI-205 e 94 fig. . . 4 50

Metallurgia — vedi: Acciai - Coltivazione delle miniere - Fonditore - Lavorazione metalli - Leghe metalliche - Meccanica industriale - Metallografia - Ricettario dell'elettricista - Ricett. di metallurgia - Saldature - Siderurgia - Tecnologie pei giovani - Tempera e cementazione - Zinco.

Metallurgia dell'oro, di E. CORTESE, di p. XV-262 e 35 inc. . . . . 3 —

Meteorologia agricola, di G. COSTANZO e C. NEGRO, di p VIII-208 e 27 inc. 2 50

Meteorologia aeronautica, di G. CRESTANI, di pag. 330 con 73 incisioni 8 50

Meteorologia generale, di L. DE MARCHI, 3ª ediz., ampliata, di p. XIX-235 con 14 fig. e 6 tav. 4 50

Metrica dei greci e dei romani, di L. MÜLLER, 2ª ediz. ital. di G. Clerico, di p. XVI-186 . . . . 1 50

Metrologia universale e codice metrico internazionale, di A TACCHINI, di p. XX-482 . . 8 —

Mezzeria pratica, di A. RABBENO (Esaurito).

Microbiologia Malattie infettive. L. PIZZINI, p. VIII-142 2 —

Microscopia — vedi: Anatomia microscopica - Animali parassiti - Batteriologia - Chimica clinica - Microscopio - Protistologia - Tecnica protistologica.

L. C

Microscopio (Il), di C. ACQUA, 2ª ediz., di p. XII-230 . 2 —
Militaria — vedi: Armi antiche - Arte militare - Codice cavalleresco - Duellante - Scherma - Tattica - Telemetria - Tiro a segno - Ufficiale esercito.
Mineralogia descrittiva, di L. BOMBICCI, 3ª ediz. a cura di P. Vinassa De Regny, di p. IV-330, 138 fig. 3 —
Mineralogia generale, di L. BOMBICCI 4ª ediz. a cura di P. Vinassa De Regny, di p. 256, 19 fig. e 2 tav. 4 50
Minerali (I), per E. ARTINI, di pag. XVI-422, con 40 tav. e 132 incisioni. . . . . 12 —
Miniere (Coltivazione delle), di S. BERTOLIO. 3ª ediz., di pag. VIII-371, con 112 incisioni 4 50
Minimi quadrati. Formole, Esercizi e Applicazione alla Topografia, di P. FANTASIA, di pag. XVI-339, con 107 esercizi . . . . 4 —
Misuratori elettrici (Frodi nei), di M. LANFRANCO, di p. XI-277, con 27 inc. e 39 tavole . . . 5 50
Mitologia classica illustrata, di F. RAMORINO, 6ª ediz. di pag 372, con 95 inc. 6 50
Mitologia greca, in due vol.
I. Divinità. II. Eroi, di A. FORESTI (2ª ediz. in lav.)
Mitologia tedesca, di R. MINUTTI, di p. XX-348 . 3 —
Mitologie orientali, di D. BASSI.
I. Mitologia Babilonese, Assira, di p. XVI-219 . . 3 —
Modellatore meccanico, falegname, ebanista, di V. GOFFI. 2ª ediz. di p. XVII-435 . 5 50
Molini. Industria. Costruzioni ecc. di C. SIBER MILLOT, 3ª ediz. rifatta da C. MALAVASI, di pag 425, con 226 figure e dieci tavole 7 50
Momenti d'inerzia e loro applicazioni, di E. GIORLI, di pag. VIII-166 con 148 figure 3 50
Moneta e falsa monetazione, di U. MANNUCCI, di p. XI-271 . . . . 3 —
Monete, pesi e misure inglesi, di I. GHERSI, di p. XII-196, 46 tabelle di conti fatti (in ristampa)
Monete greche, di S. AMBROSOLI. 2ª ediz rifatta da S. RICCI, di pag. XXV-609 con 670 inc., 2 tav. e 4 carte 9 50
Monete papali moderne di S. AMBROSOLI, di pagine XII-131 e 200 inc. 2 50
Monete romane, di F. GNECCHI, 3ª ediz. di p. XVI-418, con 203 fig. e 25 tav. (in ristampa)
Monete romane. I tipi monetari di Roma Imperiale, di F. GNECCHI, di p. VIII-119 e 28 tav. 6 50
Monogrammi, di A. SEVERI, 73 tavole a serie di due e di tre cifre (esaurito).
Monogrammi moderni, di A. SORESINA, in 35 tav. 3 —
Morfologia greca. di V. BETTEI, di p. XX-376 3 —
Morfologia italiana, di E. GORRA, di p. VI 142 . 1 50
Morte vera e morte apparente, di F. DELL'ACQUA, di p. VIII-136 . . . . 2 —
Mosche - Vedi Insetti della casa.
Mosti dei vini e degli spiriti. Densità ecc., di E. DE CILLIS, di p. XVI-230 . 2 —
Mosto (Dal) al vino. Fermentazione alcoolica, di S. CETTOLINI di p. XII-490, con 62 inc. . 5 50
Motoaratura e motocultura, di G. L. CERCHIARI, di pag. 386, con 116 figure . . . . . . 10 —

L. C.

Motociclista tourista e militare. *Side-cars: Motorettes*, di F BORRINO, 4ª ediz., di pag 658, con 492 illustrazioni . . 14 —
Motori Diesel, di G. SUPINO 3ª ed. curata dall'ing. Barberi R., di pag. XVI-391, con 325 figure nel testo e 19 tavole di disegni in busta a parte . . . . . . 15 —
— vedi Motori a olio pesante.
Motori a gaz, di V. CALZAVARA (2ª ediz. riveduta, di pag. XXXVI-423 con 160 incisioni . . . . . 6 —
Motori a olio pesante, a pressione ed a forza viva, di E. GARUFFA, di pag. VIII-493 (in ristampa).
Motori a scoppio, di E GARUFFA. 4ª ediz., di pagine 790 con 843 incisioni (in ristampa).
Motorista d'aviazione (Il), di L. CEI, di pag. 552, con 338 illustrazioni 12 50
Motrici ad esplosione, a gaz povero, ad olii pesanti, a petrolio, per aviazione, Diesel, di F. LAURENTI, 3ª ed. ampliata di p. 598, con 355 inc. 8 50
Municipalizzazione dei servizi pubblici, di C. MEZZANOTTE, di p. XX-324 . . . . . . 3 —
Muratore (Il), di I. ANDREANI, 3ª ediz , p. 280 e 235 fig. 6 —
Musica. Espressione e interpretazione, di G. MAGRINI, di p. VIII-119 e 228 fig. . . . . . 3 —
Musica (Manuale teorico pratico della), per le famiglie e le scuole di G. MAGRINI, 2ª ediz. di pag. 615 . . 6 50
Musica — vedi anche ai singoli titoli: Acustica musicale - Armonia - Arte e tecnica del canto - Ballo - Canto - Chitarra - Contrappunto - Mandolinista - Musica - Pianista - Psicologia musicale - Ritmica - Semiografia musicale - Storia della musica - Strumentazione - Strumenti ad arco - Violoncello - Violino.
Napoleone I., di L. CAPPELLETTI. 3ª ed. di p. 306 . 4 —
Naturalista preparatore (Imbalsamatore), di R. GESTRO, 5ª ediz., di p. XVI-214 e 52 fig. 3 50
Naturalista viaggiatore, di A. ISSEL e R. GESTRO, di p. VIII-144 e 38 inc. (esaurito).
Nautica — vedi: Astronomia nautica - Attrezzatura navale - Avarie e sinistri marittimi - Bandiere - Canotaggio - Codice di marina - Costruttore navale - Doveri macchinista navale - Filonauta - Flotte moderne - Ingegnere navale - Lavori maritt. - Macch. navale - Nautica stimata - Nave.
Nautica stimata o navigazione piana, di F. TAMI, di p. XXXII-179 e 47 fig. 2 50
Nave (La) moderna da battaglia, di G. ALMAGIÀ, di pag VIII-237, con 60 figure e tavole . . 4 —
Nave (La) **in ferro,** di E. GIORLI di pag. VIII-413, con 197 illustrazioni . . . . 4 —
Nave (La) **subacquea.** Sottomarini e sommergibili di E. CAMPAGNA, di pag 358, con 108 inc. e 8 tavole . 5 50
Navigazione aerea (Aviazione), di A. DE MARIA, di p. XVI-338 e 103 fig. (in ristampa).
Nevrastenia, di L. CAPPELLETTI di p. XX-490 (esaur.)
Notaio (Man. del), di A. GARETTI, 9ª ediz. interamente rifatta, ampliata e messa al corrente con le nuovissime disposizioni di legge per cura dell'avv. G V. BIANCOTTI, di pag. XX-904 . . . . 11 50

L. c.

Numeri primi (Tavole di), di L. POLETTI. (In preparaz.).

Numismatica. Atlante numismatico italiano, di S. AMBROSOLI, di p. XVI-428 e 1746 inc. 10 50

Numismatica (Manuale di), di S. AMBROSOLI, 5ª ediz., rifatta di F. GNECCHI, di pag. 248, con 40 tav. eliotipiche 7 50

Numismatica — vedi anche ai singoli titoli: Atene - Guida numismatica - Monete greche, papali, romane - Vocabol. numismatico.

Nuoto (Il). L'arte di nuotar bene, di A. BERETTA, di pag. XII-278, con 109 incisioni 3 50

Nutrizione del bambino, di L. COLOMBO, di p. XX-228 e 12 inc. 2 50

Oculistica (Manuale di), per Medici e Studenti, di D. BRUNO, di pag. XII-288, con 29 incisioni. . . . 4 50

Occultismo, di N. LICÒ, di p XVI-328 (in ristampa).

Occultismo — vedi anche ai singoli titoli: Chiromanzia - Dizionario di scienze occulte - Magnetismo - Spiritismo - Telepatia.

Oceanografia, di G. MAGRINI (in lavoro).

Oftalmojatria veterinaria, di P. NEGRI e V. RICCIARELLI, di p. XVI-279, con 87 ill. e 15 tavole . 3 50

Olii vegetali. Piante erbacee a seme oleoso, di G. DEL NERO, di p. XV-313 e 41 inc. 3 50

Olii e grassi vegetali, animali e minerali, di G. Fabris, di pag. 546, con 23 inc. . . . . . . 7 —

Olivicoltura e industria dell'olio d'oliva, di F. R. SIMARI, di pag. XIX-465, con 146 incisioni . . 4 50

Omero, di W. GLADSTONE, trad. di R. Palumbo e C. Fiorilli (esaurito).

Operaio Manuale dell'), di G. BELLUOMINI, 8ª ediz., riveduta da I. GHERSI di p. 314 con 33 inc. 3 50

Operaio elettrotecnico, di G. MARCHI, 7ª ediz., ampliata, di p. 725 con 454 illustraz. 10 50

Operaio (L') meccanico al macchinario moderno d'officina, di G. CHIOVATO, curata da C. ARPESANI, di pag. VIII-333 (in ristampa).

Orchidee, di A. PUCCI, di p. VI-303, e 95 inc. . . . . 4 —

Ordinamenti degli Stati liberi d'Europa, di F. RACIOPPI, 2ª ediz., di p. XII-316 . . . . 3 —

Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, di F. RACIOPPI, di p. VIII-376 . . . . 3 —

Orefice (Man. per l') di E. BOSELLI, 3ª ediz. rifatta da A. LINONE, di pag. 436, con 370 figure 7 50

Oreficeria floreale (Modelli), di A. MYLIUS, 50 tavole e testo . . . . 3 —

Organista (Man. dell'), di C. LOCHER e pref. di E. Bossi, di p. XIV-187 . . . . 2 50

Organoterapia, di E. REBUSCHINI, di p. VIII-432 . 4 50

Ornamenti sulle stoffe (L'arte di disporre gli), di E. CASARTELLI, di p. XI-37, 38 tav. e 170 disegni . 3 50

Ornatista (Man. dell'), di A. MELANI, 2ª ediz., XXVIII tav. e testo (in ristampa).

Ornitologia italiana, di E. ARRIGONI DEGLI ODDI, di p. 907, 36 tav. e 401 fig. . . . . 18 —

Orologeria moderna, di E. GARUFFA, 2ª ediz., di p. VIII-384 e 366 fig. (in ristampa).

L. C.

Orticoltura, di D. TAMARO, 6ª ediz. rifatta, di pag. 690, illustrata da 237 figure. . . . . . . 12 —
Ortoepia e ortografia italiana moderna, di G. MALAGOLI, 2ª ediz. riveduta, di pag. XX-294 . . 3 —
Ortofrenia. Educazione dei fanciulli, di P. PARISE, di p. XII-231 . . . . 2 —
Ortopedia — vedi: Membra artificiali.
Ospedali – vedi: Igiene ospedaliera.
Ostetricia. Ginecologia minore, di L. M. BOSSI 2ª ed. curata da V. DE BLASI, (in ristampa).
Ostricoltura e mitilicoltura, di D. CARAZZI, di p. VIII-302 . . . . . 2 50
Ottica, di E. GELCICH, di p. XVI-576 e 261 fig. . . . 6 —
Ottica (L') di Euclide di G. OVIO. di p. 435, c. 260 inc. 7 50
Paga giornaliera (Prontuario della), da L. 0,50 a L. 10, di C. CARREGARO-NEGRIN. 2ª ediz. di p. X-463. 6 50
Paleoetnologia, di I. REGAZZONI (esaurito).
Paleografia greca e latina, di E. M. THOMPSON, trad. di G. Fumagalli, 3ª ediz., p. 208, 38 inc., 8 tav. 4 —
Paleontologia, di P. VINASSA DE REGNY, di p. XVII-512, con 356 fig. 5 50
Pane e panificazione, di G. ERCOLANI, di p. VIII-261. con 61 inc. e 4 tav (in ristampa).
Parrucchiere (Man. del) di A LIBERATI, p 219 e 88 inc 2 50
Pasticciere e confettiere moderno, di G. CIOCCA, 2ª ediz., di pag. LXXII-470 con 136 illustrazioni e 36 tavole in cromo (in ristampa).
Pastificio (Industria del), di R. ROVETTA, di p. XVI-240, 107 inc. e 4 tav. . . . . 3 —
Patate. Coltura e usi, di N. ADUCCI pag. 245 (in rist.).
Patologia degli infortuni sul lavoro in rapporto alla assicurazione, di T. CASAROTTI pag. XV-642 6 —
Patrologia (Manuale di) di P. G. FRANCESCHINI, di p. 647 12 50
Pedagogia (Storia della), di A. MORGANA, con prefazione di A. STRATICÒ, di pag. XIX-553 . . . . 5 —
Pedagogia (Elementi di), di G. VIDARI.
Vol. I. I dati della pedagogia, di pag. 412 . . . 4 50
Vol. II. La teoria dell'educazione, di pag. 498. . . 7 50
Vol. III. La Didattica (in corso di stampa).
Pellagra. Storia, patogenesi, ecc., di G. ANTONINI, di p. VIII-166 e tav. . . . 2 —
Perito meccanico (Il) nello studio di macch. idrovore, idrauliche, pneumofore, impianti industriali, ecc. di S. Dinaro, di pag. VIII-252 . . 2 —
Pescatore (Man. del), di L. MANETTI (in ristampa).
Peso dei metalli, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, di G. BELLUOMINI. 2ª ediz. di pag. XXIV-248 (in ristampa).
Petrolio e acque sotterranee, di J. e L. MASSARENTI, di pag. 342 con 229 incisioni 8 50
Pianista (Il). Pensieri, giudizi e consigli sullo studio del pianoforte di V. RICCI, di pag. 263 . 3 50
Piante aromatiche e medicinali (Coltivaz. delle) di C. CRAVERI, di pag. XXIX-307, con 71 incisioni . 8 50
Piante e fiori sulle finestre, nei cortili, ecc. di A. PUCCI, 3ª ediz. di p. VIII-214 e 107 fig . . 3 50
Piante erbacee a seme oleoso, di G. DEL NERO, di p. XV-313 e 51 fig. 3 50

L. c.

Piante industriali, A. ALOI, 3ª ed., p. XI-274, 64 inc. 2 50
Piante tessili, di M. A. SAVORGNAN D'OSOPPO, di p. XII-476 e 72 inc. (esaurito).
Pietre preziose, di U. MANNUCCI, di p. XV. inc. e 14 tav. 8 50
Pila elettrica (La), di A. ASTOLFONI, di p. XV-2.., con 105 incis. 4 50
Pino da pinoli, di L. BIONDI e E. RIGHINI, p. XII-142 2 50
Pirotecnia moderna, di F. DI MAJO, 3ª ediz. riv. e ampliata da G. FIORINI, di pag. 198, con 130 inc. . 2 50
Piscicultura pratica del Prof. F. SUPINO di p. VIII-327, con 79 incisioni e 14 tavole 5 50
— vedi: Idrobiologia applicata.
Pittura. Fiori all'acquarello, ad olio ed a guazzo sulle stoffe, di G. RONCHETTI, di p. VIII-167, e 11 tav. . 4 —
Pittura pei dilettanti, ad olio, acquarello, miniatura, guazzo, tempera, encausto, pastello, fotopitt., ecc. di G. RONCHETTI, 6ª ed., di pag. XXIV-463, con 38 inc. e 38 tavole di cui 14 a colori . . . . 12 —
Pittura italiana antica e moderna, di A. MELANI, 3ª ediz., di p. XVIII-527 e 164 tav. . . . 12 —
Pittura murale. Affresco, tempera, ecc., di G. RONCHETTI, di p. XV-358 . . . . 4 —
Pittura — vedi anche: Anatomia pittorica - Colori e vernici - Composizione delle tinte - Decorazione - Disegno - Luce e colori - Ristauratore dipinti - Scenografia - Storia dell'arte.
Planetologia di E. CORTESE, di pag. VIII-387 con 12 figure e 2 tavole . . . . 3 —
Pneumonite crupale e sua cura, di A. SERAFINI, di p. XVI-222 . . . . 2 50
Poliedri, curve e superfici, secondo i metodi della Geometria descrittiva, di G. LORIA, di p. XVI-231 3 —
Poligonazione tacheometrica di A. BARBIERI, di pag. XVI-246 . . . . 2 50
Polizia giudiziaria, ad uso dei Periti e Magistrati di L. TOMELLINI, di p. XX-352 e 161 inc. . . . 5 —
Polizia sanitaria degli animali, di A. MINARDI, di p. VIII-333 e 7 fig. . . . . 3 —
Polli — vedi: Malattie dei polli - Avicoltura.
Pollicoltura, di G. TREVISANI, 10ª ediz. con appendice sull' "Allevamento industriale dell' anatra", di pag. 347, con 111 incisioni 7 50
Pomodoro. Coltivazione - Industria, ecc., di R. ROVETTA, di pag. 295, con 90 figure . . . . . . 4 —
Pomologia, G. MOLON, p. XXXII-717 86 inc. e 12 tav. 10 50
Pomologia artificiale, di M. DEL LUPO, di p. VI-132 e 34 inc. . . . . 2 —
Pompiere moderno. Manuale del vigile del fuoco, di P. COGOLI e R. RAMPINI, di p. 500, con 14 tav. e 526 fig. 7 50
Porco (Il), Razze, allev., ecc., di F. FAELLI, di p. XIX-461, con 100 fig. e 5 tavole . . . . 6 —
Posologia dei rimedi più usati nella terapia infantile, di A. CONELLI, di p. VIII-186 . . 2 —
Posta. Manuale postale di A. PALOMBI, di p. XXX-308 —
Prati (I). Prati naturali, artificiali, pascoli, ecc., di E. MARCHETTANO, di p. VIII-392 e 162 inc. . . . . 4 -

L.

Prealpi bergamasche. Valsassina, Valtellina e Valcamonica, di A. STOPPANI e A. TARAMELLI, 3ª ediz. di p. 290, 15 tav. e 3 carte. 2 vol. in busta . . 6 50
Privative governative, Uffici di vendita e loro funzionamento. Rivendite, di I. GUASTALLA, p. XIX-406 3 50
Privative industriali — vedi: Codici e leggi Vol IV (p. 14).
Problema (Il) dei tre corpi da Newton ai nostri giorni, di R. MARCOLONGO, di pag. 174 . 4 50
Processi fotomeccanici moderni, di R. NAMIAS, 2ª ediz., di pag. XI-321, con 76 figure e 12 tav. 4 —
Prodotti agricoli del tropico, di A. GASLINI, di p. XVI-270 (in ristampa).
Prodotti ceramici. Majoliche, porcellane, grès, di G. MADERNA, di p. XII-345 e 92 fig. 5 50
Prodotti chimici organici usati come medicamenti (Fabb. dei) di C. CRAVERI. Prepar. caratt, reazioni, usi, dosi di 1600 prod Pag. VIII-730 con 27 inc. 11 50
Prodotti e procedimenti nuovi nelle industrie (succedanei, surrogati, ecc.) di I. GHERSI, di pag. 986, con 148 inc. 11 50
Produzione e commercio del vino in Italia, di S. MONDINI, di p. VII-303 . . . . 2 50
Profilassi e disinfezione per uso del R. Esercito del Cap. Medico V CHIODI, di pag. XII-196 con 32 inc. 4 50
Profumiere (Man. del), di A. ROSSI, 2ª ed., p. XXIV-650 8 —
Progettista moderno di costruzioni architettoniche, di I. ANDREANI, 3ª ediz. ampliata di pag. XV-559, con 196 inc. e 67 tavole 9 50
Projezioni fisse e cinematografo, di L. SASSI, di p. XVI-484, con 308 fig. 6 50
Prontuario del forestale. (Suolo, Selvicoltura, Rimboschimento, ecc.), di E. FERRARI, di pag. 460 con 59 tavole fuori testo . . . . 12 —
Prontuario tecnico legislativo, di G. VIVARELLI, di p. 300, con 131 inc. . . . . . . 4 —
Proprietario di case e opifici, di G. GIORDANI, di p XX-264 . . . . 1 50
Prospettiva, di C. CLAUDI, 3ª ed., p. XII-76 e 33 tav. 3 50
Prospettiva per gli scultori, il Bassorilievo, di A. NOELLI, di pag. XII-78, con 3 disegni 2 50
Protezione degli animali, di N. LICÒ, di p. VIII-200 2 —
Protistologia, di L. MAGGI, 2ª ed., di p. 294 e 93 inc. 3 —
Proverbi e modi proverbiali italiani, di G. FRANCESCHI, di p. XIX-380 . . . . . 3 —
Proverbi sul cavallo, di C. VOLPINI, di p. XIX-172 2 50
Psichiatria. Confini, cause e fenomeni della pazzia, di J. FINZI, di p. VIII-225 (esaurito).
Psicologia, di C. CANTONI, 2ª ediz. (esaurito).
Psicologia fisiologica, di G. MANTOVANI, 2ª ediz., di p. XII-175 e 16 inc. . . . . 3 —
Psicologia musicale, di M. PILO, (esaurito).
Psicopatologia legale, di L. MONGERI, di p. XX-421 4 50
Psicoterapia, di G. PORTIGLIOTTI, p. XII-318 22 inc. 4 —
Pugilato e lotta libera per difesa personale, di A. COUGNET, 2ª ed., p. XXXV-396 e 222 inc. 5 50
Raccoglitore di oggetti minuti e curiosi, di J. GELLI, di p. X-344 e 310 inc. 5 50

L. C.

Rachitide e deformità da essa prodotte, di P. MANCINI, di p. XXVIII-300 e 116 fig. . . . 4 —
Radioattività, di G. A. BLANC, pref. di A. Sella e Append. di G. D'ORMEA, di p. VIII-266 e 72 inc. . . 3 —
Raggi Rontgen e loro pratiche applicazioni, di I. TONTA, di p. VIII-160 (esaurito).
— vedi: Röutgen tecnica.
Ragioneria, di V. GITTI, 6ª ediz., di p. VIII-115 . . . 1 50
Ragioneria delle cooperative di consumo, di G. ROTA, (esaurito).
Ragioneria domestica, di A. MASETTI 2ª ed. p. 198 1 50
Ragioneria industriale, di O. BERGAMASCHI, 3ª ediz. a cura di A. MASETTI, di p. VIII-404 . . . 5 —
Ragioneria pubblica, di A. MASETTI, di p. XV-293 3 —
Ragioniere (Prontuario del), di E. GAGLIARDI. 2ª ed. rifatta ed aumentata, di pag. XII-603 . . . . . 6 50
Razze bovine, equine, suine, ovine e caprine, di F. FAELLI 2ª ediz. ampliata di pag. XXXIII 512 con 197 tav. 12 50
Reattivi e reazioni di E TOGNOLI, di pag. 289. . 3 50
Regolo calcolatore e applicazioni nelle operazioni topografiche, di G. POZZI, 2ª ediz., di p. XVI-303 e 150 fig. . . . . 3 —
Religione — v. Bibbia - Corano - Imit. Cristo S. Giov. - - San Paolo - Vangelo - Vita di Gesù -Vita di Maria.
Religioni primitive (L'idea di Dio nelle) di F. JEVONS e di U. PESTALOZZA, di pag. XVI-178 . . 2 —
Religioni e lingua dell'India inglese, di R. CUST, trad di A. De Gubernatis, di p. IV-124 . . 1 50
Residui agricoli, Utilizzazioni, ricuperi, di C. FORMENTI, di pag. 620, con 139 inc. 6 50
Residui industriali. Utilizzazioni Ricuperi, di C. FORMENTI, di p. XX-376 . . . . 4 50
Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, di G. SANDRINELLI, 3ª diz., di p. XVIII-495 e 274 inc. 5 50
Resistenza e pesi di travi metalliche composte, di E. SCHENCK, 2ª ediz. (in corso di stampa).
Restauratore dei dipinti (Il) di G. SECCO SUARDO 3ª ed. con una introd. allo studio del restauro di G PREVIATI e considerazioni sul restauro moderno del Prof. L. DE JASIENSKI, di pag. XVI-574, con 47 figure . 12 —
Retorica, ad uso delle scuole, di F. CAPELLO, di p. VI-122 . . . . 1 50
Rettili d'Italia, di C. VANDONI, di pag. 288 e 55 fig. 3 50
Ricami - v. Biancheria - Lavori femm. - Macch. da cucire - Monogrammi - Piccole ind. - Ricett.domest. - Trine.
Ricchezza mobile (L'imposta sui redditi di), di E. BRUNI, di pag. 240 . . . . 1 50
Ricettario domestico. di I. GHERSI 6ª ediz., con 7192 ricette, di pag. 1299 e 172 inc. (in ristampa).
Ricettario dell'elettricista, GHERSI. p. VIII-585 con oltre 2000 ricette e provvedimenti pratici e 43 inc. 6 —
Ricettario fotografico di L. SASSI, 5ª ediz., di pag. XXXII-362 . . . . 3 50
Ricettario industriale. di I. GHERSI, 7ª ediz. rimodernata ed accresciuta con 64 figure comprendente 9253

L. C.

procedimenti utili nelle grandi e piccole industrie nelle arti e nei mestieri . . . . 24 —

Ricettario pratico per le industrie tessili e affini, di O. GIUDICI, di p. VIII-270 (in ristampa).

Ricettario pratico di metallurgia, di G. BELLUOMINI, di p. XII-328 (in ristampa)

Rimedi. L'arte di prescriverli e di applicarli, di G. MALACRIDA, di p. 400 . . . . 3 50

Rimedi — vedi: Specialità medicinali.

Riscaldamento, ventilazione e impianti di motori, di C. RUMOR e H. STROMENGER, di p. XVI-270 e 115 fig. 5 50

Riscaldamento elettrico. — V. Elettricità sorg. di calore.

Risorgimento italiano 1814-1871, di F. QUINTAVALLE, di pag. XVI-528 . . . . 5 50

Ristauratore dei dipinti. — Vedi Restauratore.

Ritmica e metrica razionale italiana, di R. MURARI, 3ª ediz. di p. XV-230 (in ristampa).

Ritmica musicale, di A. TACCHINARDI, di p. XVI-254 3 —

Rivoluzione francese 1789-1799, di G. P. SOLERIO, (2ª ediz., in lavoro)

Rocce. Concetti e nozioni di petrografia di E. ARTINI, di p. XX-653, con 134 figure nel testo e 32 tavole . . 18 50

Roma antica — vedi: Antichità priv. - Antichità pubbliche - Archeologia - Epigrafia - Mitologia - Moneta ovine (Le) del Palatino - Topografia - Mitologia.

Rontgen tecnica (I fondamenti della), di J. SCHINCAGLIA, di pag. XII-263, con 118 incisioni e 46 tavole. 5 50

Röntgen — vedi: Raggi di - Elettricità medica - Luce e salute - Radioattività.

Rose. Storia, coltivazione, varietà, di G. GIRARDI, di p. XVIII-284, 96 ill. e 8 tav. 3 50

Rovine del Palatino, di C. CANCOGNI, con pref. di R. Lanciani, di p. XV-178. 44 tav. e una pianta . 3 50

Saggiatore (Man. del), di F. BUTTARI, di p. VIII-245 2 50

Saldature autogene dei metalli, di S. RAGNO 2ª ediz., di pag. VI-129, con 18 inc. . . . . . . 3 —

Sale e saline, di A. DE GASPARIS, di p. VIII-358 e 24 fig. 4 50

Salsamentario, di L. MANETTI, di p. 224 76 inc . 2 —

San Giovanni, il Discepolo che Gesu amava, di G. M. ZAMPINI, di pag. XII-314 . . . . 5 50

San Paolo, Epistole, di G. M. ZAMPINI, di pag. XVI-405 5 —

Sanscrito (Studio del), F. G. FUMI, 3ª ediz. p. XVI-343 4 —

Saponi (L'industria dei), di V. SCANSETTI, con prefazione di E. MOLINARI, 2ª ediz. di pag. 574, con 131 inc. 8 50

Saponi da toeletta, di C. FRANCHI, p. 482, con 59 inc. 7 —

Sarto tagliatore italiano (Il), di G. PETERLONGO, di p. XII-232 e 47 tav. (in ristampa).

Scacchi (Giuoco degli), di A. SEGHIERI, 4ª ediz., a cura di E. MILIANI, di pag. VIII-550 (in ristampa).

Scenografia, G. FERRARI. p. XXIV-327, 16 inc. e 160 tav. 12 —

Scherma italiana, J. GELLI. Terza edizione riveduta di pag. 250 con 108 inc. . . . . 3 —

Scienza attuariale (Nozioni di). Matematica delle assicurazioni, di G. MINUTILLI, di pag. XIII-329 . . 4 —

Scienze (Le) **esatte nell'antica Grecia,** di G. LORIA, 2ª ediz., di pag. XXIV-974 . . . . . . 9 50

L. C

Scienze giuridiche ed economiche in conformità del progr. minist. ad uso degli Istit. tecnici, Licei moderni e Scuole di Comm. (Encicl. giurid. - Diritto civile - Diritto comm. e maritt. - Diritto penale - Proced. giudiz. - Diritto costituz. - Diritto ammin. - Economia politica - Politica comm. - Scienza della finanza - Statistica) di G. TRESPIOLI di p. XXIV-574, con 18 tav. col. 12 50
Scienze occulte (Dizionario di), di A. PAPPALARDO, di p. VIII-338 . . . . 4 50
Scienze occulte — vedi: Chiromanzia - Fisionomia - Grafologia - Magn. - Occultismo - Spirit. Telepatia.
Scoutismo. Nozioni pratiche ad uso dei giovani esploratori ital., di F. ROMAGNOLI, di p. 598, c. 132 inc. 51 tav. 7 —
Scrittura a macchina — vedi Dattilografia.
Scrittura doppia americana, di C. BELLINI, 2ª ediz. accresciuta, di pag. XII-154 (in ristampa).
Scritture d'affari, di D. MAFFIOLI, 5ª ed. (in ristam.).
Scultura italiana antica e moderna, di A. MELANI, 3ª ediz., di pag. XXXII-692, 170 tavole e 40 fig. 12 —
Segnalazioni maritt. — vedi: Attrezz. navale - Bandiere
Selenio. (La Fototelefonia - Il fonotografono Simon - La Fotometria a selenio - La Televisione - La Telegrafia - La Teleid. a colori - La Teleid. senza fili - Altri usi del selenio), di U. BIANCHI di p VIII-136, con 37 inc. 4 —
Selfacting o filatojo intermittente, di L. TONELLI, di p. VIII-159 e 41 inc. 2 50
Selvicoltura, estimo e economia forestale, di A. SANTILLI, 2ª ediz. di p. XII-292 e 54 inc. . . . . . 3 —
Selvicoltura — vedi: Boschi e pascoli - Consorzi di difesa del suolo - Colt. mont. - Pino da pinoli - Pront. del forest.
Semejotica. Esame degli infermi, di U. GABBI, 2ª ediz., di pag. XVI-216 e 11 inc. 4 50
Semiografia musicale, di G. GASPERINI, p. VIII-317 3 50
Seta (Industria della), di L. GABBA, 2ª ediz. (esaurito).
Seta — vedi ai singoli titoli: Bachi da seta - Filatura e torcitura - Gelsicoltura - Tessitore - Tessitura - Tintura - Ricettari domestico e industriale.
Seta artificiale, di G. B. BACCIONI, di p. VIII-221 . 3 50
Sfere cosmografiche e geografia matematica, di L. A. ANDREINI, di p. XXIX-326 e 12 inc. . 3 —
Shakespeare, di DOWDEN, Balzani. di p. XII-242 . 1 50
Siderurgia, di E. ZOPPETTI e E. GARUFFA, (in ristampa).
Siderurgia — vedi: Chimico siderurgico.
Sieroterapia, di E. REBUSCHINI, di p. VIII-424 . . 3 —
Sifilide (Patol. e terap. della) di A. PASINI, di p. VI-151 2 —
Sinonimi latini, di D. FAVA, di p. LXIV-114. 1 50
Sintassi francese razionale pratica, di D. RODARI, di p. XVI-206 . . . . 1 50
Sintassi greca, di V. QUARANTA di p. XVIII-175 . 1 50
Sintassi latina, di T. G. PERASSI, 2ª ediz., di p VII-168 1 50
Sismologia, di L. GATTA, di p. VIII-175 e 16 inc. . 1 50
Sismologia moderna, di G. B. ALFANO, di p. XII-357 4 —
Smacchiatura industriale e casalinga di abiti, ecc., di G. TISCORNIA di pag. XII-219 con 13 fig. 2 50
Smalto (Industria dello), di E. VERMA, di p. 246 e 30 inc. 3 —
Sistemazione dei torrenti e dei bacini montani, di C. VALENTINI, p. XII-298, 165 inc. e 46 tav 4 50

L. C.

Soccorsi d'urgenza, di C. CALLIANO, 9ª ediz. ampliata rispetto ai feriti in guerra, a cura del Dott. B. Anglesio, di pag. LII-439, con 135 inc. 4 50
Socialismo, di G. BIRAGHI, di p. XV-285 (in ristampa)
Società industriali per azioni di F. PICCINELLI, di p. XXXVI-534 (esaurito)
Società di mutuo soccorso. Pensioni - sussidi, di G. GARDENGHI, di p. VI-152 . . . . . . 1 50
Sociologia generale, di E. MORSELLI, (esaurito).
Soda caustica, cloro e clorati alcalini per elettrolisi, di P. VILLANI, di p. VIII 314 . . 3 50
Somalo (Elementi di) vedi Gramm. somala.
Sordo-muto e sua istruzione, di P. FORNARI, di p. VIII-232 e 11 inc. . . . . 2 —
Sostanze alimentari — vedi: Vigilanza igienica sulle - Bromatologia - Conservazione delle.
Sottomarini — vedi: Nave subacquea.
Sovratensioni negli impianti elettrici. Cause, effetti e protezioni, E. PIAZZOLI, pag. XVI-401 e 125 fig. 7 —
Specchi (Fabbricazione degli) **e la decorazione del vetro e del cristallo,** di R. NAMIAS, 2ª ediz. rifatta, di pag. XII-195 con 26 incisioni e 11 tavole . 3 50
Specialità medicinali (Formulario delle) di C. CRAVERI, di pagine XX-524 (in ristampa).
Speleologia, Studio delle caverne, G. CASELLI, p. XII-168 1 50
Spettrofotometria applicata, di G. GALLERANI, di p. XIX-395, 92 inc. e 3 tav. 3 50
Spettroscopio e sue applicazioni, di R. A. PROCTOR, trad. di F. Porro, di p. VI-179 e 71 inc. . 1 50
Spiritismo, A. PAPPALARDO, 5ª ediz. aumentata, di pagine XVI-290, con 10 illustrazioni 4 50
Sports invernali. Pattinaggio, slitta, ecc., di N. SALVANESCHI, di p. XV-171 e 100 ill. . . . . . 4 —
Stampaggio a caldo e bulloneria, di G. SCANFERLA, di p. VIII-160 e 62 inc. . . . . . 2 —
Stati del mondo (Gli), G. GAROLLO. Notiziario statist. 1 —
Statistica, di F. VIRGILII, 7ª ediz. di pag. XII-227 . 3 —
Statmografia, di G. ROSSI, di pag. XII-214 . . 3 —
Stearineria — vedi: Candele.
Stenografia, di G. GIORGETTI, 4ª ed. (in ristampa).
Stenografia (Guida allo studio della) di A. NICOLETTI, 12 ediz., riv. da D. NICOLETTI, di pag. 170 . 3 —
Stenografia (Esercizi di lettura e scrittura), di A. NICOLETTI. 6ª ediz. di p. VIII-160 . . . . . . 1 50
Stenografia. Antologia sten. di E. MOLINA, di p. 200 2 —
Stenografia. Dizionario etimologico stenografico, di E. MOLINA, di p. XVI-624 (in ristampa).
Stenografia. L'abbreviazione logica nella stenografia, di D. NICOLETTI, di pag. VIII-123 . . 3 —
Stenografo pratico, di L. CRISTOFOLI, di p. XII-131 1 50
Stereometria. Sviluppo dei solidi e loro costruzione in carta, di A. RIVELLI, di p. 90, con 92 inc. e 41 tav. 3 —
Stili architettonici (Gli), di B. CANELLA, 2ª edizione di pag 160, con 114 illustrazioni e 64 tavole 9 50
— Vedi Arte (L') di distinguere gli Stili.
Stilistica, di F. CAPELLO, di p. XII-164 (esaurito).
Stilistica latina, di A. BARTOLI, di p. XII-210 . . 1 50

L. c.

Stime forestali, Cont., misur. e cub. dei legn. inbosco, abb. e lavor. di O. FOGLI, di p. 136 con num. tab. e inc. 10 —
Stime di lavori edili, di I. ANDREANI, di pag. 339 . 4 50
Storia antica, di I. GENTILE e G. TONIAZZO, 2 vol.
I. L'Oriente antico (esaurito).
II. La Grecia, di p. IV-216 . . 1 50
Storia dell'arte, di G. CAROTTI.
Vol. I. L'Arte nell'Evo-antico, di pag. LV-413 (esaurito).
Vol. II. L'Arte nel Medio-evo:
Parte I. - Arte cristiana, di pag. VIII-421 e 360 incis. 8 —
Parte II. - L'arte regionale italiana nel medio-evo, di pag. 667 con 553 incisioni 12 50
Parte III. L' Apogeo dell' arte italiana nel medio-evo, di pag. 581 a 1390, con 591 incisioni . . . 15 —
Vol. III. L'Arte nel rinascimento (in lavoro).
Vol IV. L'Arte dell'Evo-moderno (in lavoro).
Storia dell'arte militare, di V. ROSSETTO, di p. VIII-504 e 17 tav. 5 50
Storia e cronologia medioevale e moderna, di V. CASAGRANDI, 3ª ediz. di p. VIII-254 . . . 1 50
Storia d'Europa, di E T. FREEMANN, trad. di A. GALANTE, di p. XII-472 . . . . 3 —
Storia di Francia, di G. BRAGAGNOLO, di p. XVI-424 3 —
Storia d' Inghilterra, G. BRAGAGNOLO, p. XVI-367 3 —
Storia d'Italia, di P ORSI, 5ª ediz., continuata fino al 1915, di pag. XIII-295 . . . . 8 —
Storia vedi: Antichità - Archeologia - Argentina - Astronomia nell'antico testamento - Atene - Commercio - Cristoforo Colombo - Cronologia Dizionario biografico - Etnografia - Islamismo - Leggende - Manzoni - Mitologia - Monete - Numismatica - Omero - Risorgimento Rivoluzione francese - Shakespeare - Topografia di Roma.
Storia delle matematiche (Guida allo studio della) di G LORIA, di pag. XVI-227 . . . . 3 —
Storia della musica, di A. UNTERSTEINER, 4ª ediz., di pag. 500 . . . . 5 50
Storia naturale — vedi: Anat. e fisiol - Anatom. micr. - Animali parass. - Antrop. Batteriol. - Biologia animale - Botan. Cammello - Coleotteri - Cristallografia - Ditteri - Embriol. Farfalle - Fisica cristall. - Fisiol. - Geologia Imenotteri - Insetti - Ittiolog. - Lepidotteri - Limnol, Mineral - Naturalista preparat. Natur. viaggi. - Oceanogr. - Ornitol. Ostricoltura - Paleoetn. - Paleontologia - Pisci olt. - Sismol. - Speleol. - Tecnica protisto Uccelli canori - Vulcan - Zebre - Zoologia.
Strade ferrate in Italia. Regime legale amministrativo, di F. TAJANI, di p. VIII-265 . . . . 2 50
Strade ordinarie e loro manutenzione, di F. FROSALI, di p. XI-216 e 37 inc. . . 2 50
Strade urbane e provinciali e loro pavimentazione di P. BRESADOLA, p. XVI-330 e 40 inc. 5 50
Strumentazione, di E. PROUT, trad. di V. Ricci, 2ª edizione, di pag. XVI-314 e 95 incisioni (in ristampa).
Strumenti ad arco e musica da camera, del Duca di CAFFARELLI, di p. X-235 (esaurito).
Strumenti diottrici, V. REINA, p. XIV-220 e 10 fig. 3 —

L. C.

Strumenti metrici. Costruzione delle bilance, ecc., di E BAGNOLI. di p. VIII-252 e 192 inc. . . 3 50
Succedanei vedi Prodotti e procedimenti
Struzzo. (Allevamento dello) nell'Africa meridionale, di L. MERLATO, di pag. 144, con 23 tav. a colori . . 9 50
Sughero scorze e applicazioni industriali, di A. FUNARO e N. LOJACONO, di p. VII-170 . . . 2 50
Suinicoltura pratica, di I. STANGA, di pag 200, con 36 illustrazioni 3 50
Superstizione, di G. FRANCESCHI, di pag. XII-264 . 2 50
Surrogati — vedi: Prodotti o procedimenti.
Tabacco (Il) e sua coltura, di G. BEVERSEN, di pagine XXVIII-219, 9 inc. e 31 tav.. . . . . . . 4 50
Tabacco, di G. CANTONI, di p IV-176 e 6 inc. . . . 2 —
Tabelle di analisi — vedi: Analisi chimica qualitativa.
Tannini (I), nell'uva e nel vino, di R. AVERNA-SACCÀ, di p. VIII-240 . . . . 2 50
Tartufi e funghi, coltura e cucinatura, di FOLCO-BRUNI, di p VIII-184 (esaurito).
Tattica applicata, di A. PAVIA di p. VIII-214 . . 4 50
Teatro antico greco-romano, di V. INAMA, di p. XX-248 e 32 fig. 2 50
Tecnica protistologica. di L. MAGGI, di p. XVI-318 3 -
Tecnologie per i giovani operai, secondo i programmi governativi, di I. ANDREANI:
I. — Legno, metalli, ecc., di pag. 780, con 511 inc. . 8 50
II. — Matematica, di pag. XII-488, con 210 inc. . . 6 —
III. — Fisica, di pag. 354, con 288 incisioni . . . . 6 —
Tecnologia e terminologia monetaria, di G. SACCHETTI, di p. XVI-191 . . . . 2 —
Telaio meccanico (Il). Guida pratica, di A. PIOMBO di p. XII-159 e 28 fig. . . . . 3 —
Telefono (Il), di G. MOTTA, (in ristampa).
Telegrafia elettrica, aerea, sottomarina e senza fili di R. FERRINI. 4ª ed. ampl. da C. CANTANI, di pag. 352, con 137 inc. (in ristampa).
Telegrafista (Guida del), di G. CANTANI, 4ª ediz., di pag. 255, con 138 inc. 4 50
Telegrafo senza fili e onde Hertziane, di O. MURANI, 3ª ediz., di p. 520 con 268 incisioni. . . . 7 50
Telemetrica per pratica e per studio, di G. DEL FABRO, di pag. 415, con 179 incisioni . . . 13 50
Telemetria, misura delle distanze in guerra, di G. BERTELLI, di p. XIII-145 e 12 fig. (in ristampa).
Telepatia. Trasmissione del pensiero di A. PAPPALARDO, 3ª ediz., di p. XVI-343 . . . . 4 —
Tempera — Vedi acciaio.
Tennis (Il), di A. BONACOSSA e G. PORRO LAMBERTENGHI, di pag. XX-240 con 84 illustrazioni . . . 4
Teoria dei numeri, di U SCARPIS, di p. VIII-152 . 1 50
Teoria delle ombre, di E. BONCI 3ª ediz. di pagine XVI-134, con 48 fig. e 6 tav. 3 50
Teosofia, di G. GIORDANO, di p. VIII-248 . . . . . 3 50
Terapeutica — vedi ai singoli titoli: Chimica clinica - Chimica legale - Farmacista - Farmacoterapia - Medicina d'urgenza - Medico pratico - Organoterapia - Posologia rimedi - Rimedi - Terapia malattie infanzia.

L. C.

Termodinamica, di G. CATTANEO, p. X-196 e 4 fig. 1 50
Terreno agrario. Chimica del terreno, di A. FUNARO, di p. VIII-200 . . . . 2 —
Tessili — vedi Tecnologi per giovani - Tessitura - Filatura
Tessitore (Man. del), di P. PINCHETTI, 3ª ediz., di p. XIV-298 e illustr. 3 50
— vedi: Apparecchiatura dei tessuti - Industrie tessili.
Tessitura meccanica della lana e del cotone, di E. G. FRANZI, di p. VII-329 . . . . . 5 50
Tessitura meccanica della seta, di P. PONCI, di p. XII-346 e 179 inc 5 50
Tessuti (Man. del compositore di), di P. PINCHETTI, di p. VIII-321, ill. da 2000 armature 4 50
Tessuti di lana e cotone (Analisi e fabbricazione), di O. GIUDICI, di p. XII-864, con 1098 inc. . . . 16 50
Testamenti (Manuale dei), di G. SERINA, 3ª ediz. riveduta ed ampliata, di pag. XIV-380 . . . . . . 6 —
Tigré italiano. Idiomi parlati in Eritrea, con 2 dizionari, di M. CAMPERIO, di p. 180 . . . . . . 2 50
Tintore (Man. del), di R. LEPETIT, 4ª ediz., di p. 482 5 —
Tintura della seta, di T. PASCAL, di p. XV-432 5 —
Tipografia. Vol. I. Guida per chi stampa e fa stampare di S. LANDI, 2ª ediz. postuma, di pag. XXII-279. 3 50
— Vol. II. Lezioni di composizione, di S. LANDI 2ª ediz. postuma, con appendice - Linotype - Monotype - Lettera-tipo - Vocabolarietto tecnico, di pag 370 . . . 3 50
Tiro a segno nazionale, di A. BRUNO, p. VIII-335 3 —
Tisi (Come si vince la). Profilassi e diagnosi di F. MOTTOLA, e pref. di A. De Giovanni di p. XII-208 . . . 2 50
Tisici e sanatori, di A. ZUBIANI, con pref. di B. Silva, di p. XLI-240 . . . . 2 —
— vedi: Tubercolosi.
Topografia (Man. di), di G. DEL FABRO, 3ª edizione, di pag. 737, con 169 illustrazioni 16 50
Topografia (Guida pei calcoli di), di G. DEL FABRO, di p. XVI-216 e 71 fig. 3 50
Topografia e rilievi — vedi: Cartografia - Catasto - Celerimensura - Codice del perito - Compensazioni errori - Curve - Disegno topogr. - Estimo terreni - Estimo rurale - Fotogrammetria - Geometria pratica - Prospettiva - Regolo calcolatore - Telemetria - Tracciamento curve - Triangolazioni.
Topografia di Roma antica, di L. BORSARI, di p. VIII-436 e 7 tav. . . 4 50
Tornitore meccanico (Guida del), di S. DINARO, 10ª ed. riveduta con appendice "La tornitura dei projettili per le artiglierie", di pag. 316 e 117 fig. . 4 50
Tornitore e fresatore meccanico, di L. DUCA, 3ª ediz., di p. 188, con 30 inc. 3 50
Torrenti — v. (Sistemazione dei).
Tracciamento delle curve delle ferrovie e strade, di G. H. A. KRÖNKHE, trad. di L. Loria, 3ª ediz., di p. VIII-167 . . . . 3 50
Traduttore tedesco (Il), di R. MINUTTI, pag. XVI-224 2 50
Tramvie — vedi: Ferrovie.
Trasporti aerei, di G. CAPPELLONI, di pag. XVI-367 con 259 figure. . . . . 7 —

L. c.

Trasporti, tariffe e reclami ferroviari, di E. PELIZZARO, di pag. XVI-319 . 4 50

Trazione ferrovaria, di P. OPPIZZI, di p. VII-204, con 2 tav. e 51 fig. . 3 50

Trazione a vapore sulle ferrovie ordinarie, di G. OTTONE, di p. LXVIII-469 . . . . . 5 50

Triangolazioni topografiche e catastali, di O. JACOANGELI, di p. XIV-340 e 33 inc. 9 50

Trigonometria piana (Esercizi di), di C. ALASIA, di p. XVI-292 e 30 inc. (in ristampa).

Trine a fuselli, di G. ROMANELLI-MARONE, di p. VIII-331 e 200 illustr. 4 50

Tubercolosi (La), di M. VALTORTA e G. FANOLI, con pref. di A. Murri, di p. XIX-231 e 11 tav. . . . 4 —

Turbine a vapore, di E. GARUFFA con un capitolo sulle turbine a gas. Teoria - Calcolazione - Costruzione, di pag. XVI-782 con 536 fig. e 1 tav. fuori testo. 22 50

Turco parlato. Grammatica, dialoghi, vocabolario, di L. BONELLI e S. JASIGIAN, di p. VIII-343 . . . 6 —

Uccelli canori. Caratteri, costumi e loro cura, di L. UNTERSTEINER, 2ª ediz., di p. VIII-226 e 6 inc. . . 2 50

Ufficiale italiano (L') di U. MORINI (esaurito).

Unità assolute. Definizione, dimensione, problemi, di G BERTOLINI, di p. X-124 . . . . 2 50

Uovo (L') **di gallina.** Conservazione e commercio, di C. VIVIANI, di pag. 394 con 48 incisioni . . . 3 50

Urina (L') nella diagnosi delle malattie, di F. JORIO, di p. XVI-216 (in ristampa).

Urologia chimica e microscopica, di P. E. ALESSANDRI, di pag. 485, con 144 inc. e 2 tav. . . . 9 —

Usi mercantili riconosciuti dalle Camere di Commercio in Italia, di G. TRESPIOLI, di p. 623 6 —

Uve da tavola. Coltivazione e commercio, di D. TAMARO. 3ª ediz. di p. XVI-278, 8 tav. e 57 . . . . 4 —

Vademecum dell'uomo d'affari, di C. DOMPÉ, 2ª ediz., di pag. 562 . . . . 8 50

Vangelo Manuale del) di G. M. ZAMPINI . XLVII-480 4 50

Veleni e avvelenamenti, di C. FERRARIS, di pagine XVI-208 e 20 inc. 2 50

Ventilatori industriali, di A. ALBERT, di pag. 400, con 178 incisioni 7 50

Verbi regolari francesi, irregolari e difettivi, di C. DOMPÉ, di pag. 170 . . . , ... 3 —

Verbi greci anomali P. SPAGNOTTI, pag. XXIV-107 1 50

Verbi italiani, di E. POLCARI, di p. XII-260 . . 1 50

Verbi latini di forma particolare nel perfetto e nel supino, di A. PAVANELLO, p. VI-215 1 50

Vernici, lacche, mastici e inchiostri da stampa. Fabbricazione, ecc., di U. FORNARI, 3ª. ediz., di pag. XVI-272 . . . . 3 50

Vernici — vedi Colori e Vernici.

Veterinaria — vedi: Araldica zootecnica - Bestiame - Cavallo - Igiene veterinaria - Malattie infettive - Majale - Oftalmoiatria veterinaria - Polizia sanitaria - Porco - Profilassi malattie - Razze bovine - Zootecnia.

L. C.

Veterinario (Man. del), di C. ROUX e V. LARI, di pagine XX-356 e 16 fig. (esaurito).

Vetro. Fabbricazione, lavorazione, applicazioni, di G. D'ANGELO, di p. XIX-527 e 321 fig. (esaurito).

Vigilanza igienica sulle sostanze alimentari, di E. TOGNOLI, di pag. XXIV-469 . . . . . 3 50

Vigile urbano (Vademecum pel) di G. SACCHIERO, di pag. XIV-178 . . . . 2 50

Vini bianchi da pasto e vini mezzocolore, di G. A. PRATO. 2ª ediz. riv. da A. Strucchi, p. XII-280 3 50

Vini dai residui della vendemmia e vini sussidiari. Secondi vini e vinelli - Modo di aumentare la produzione di S. CETTOLINI di pag. 338 con 40 inc. 5 —

Vini (I migliori d'Italia), di A. STRUCCHI, di p. XX-25, 42 tav. e 7 carte 3 50

Vini non genuini, di A. DURSO-PENNISI di pag. 198, 2 50

Vini, aceti, spiriti (invecchiamento artificiale dei), di A. DURSO-PENNISI, di p. 185, con 35 inc. 2 50

Vini speciali provenienti da uve da tavola e vini artificiali, di A. DURSO-PENNISI, di p. XII 212 e 68 fig. 3 50

Vinificazione (Man. di), U. GALLO, p. XI-253 e 33 inc. 2 50

Vino (Il), di G. GRAZZI-SONCINI, 2ª edizione riveduta da A. STRUCCHI, con appendice sui vini spumanti, di pag. XX-229 e 17 incisioni 3 50

Violini, violinisti e musica per violino, di A UNTERSTEINER, con app. di A. Bonaventura, di pagine VIII-228 . . . . 3 50

Violoncelli, violoncellista e violoncellisti, di S. FORINA, di p. XVII-444 . . . . 5 50

Viti meccaniche, calcolo e costruzione, di A. MASSENZ, 2ª ediz di p. 270, con 111 inc 5 50

Vita di Gesu di L. ASIOLI, 2ª ediz. con carta di Terra Santa. Pag XII-253 . . . . 4 —

Vita di Maria di L. ASIOLI. Pag VIII--202 . . . . 3 —

Viticoltura (Precetti di), di O. OTTAVI, 7ª ediz. riv. da A. Strucchi, di p. XVI-244, con 30 incisioni . . 2 50

Vocabolario Albanese — vedi Albanese parlato.

Vocabolario araldico italiano, di G. GUELFI, di p. VIII-294 e 356 inc. (in ristampa)

Vocabolario Hoepli della lingua italiana, compilato da G. MARI, di pag. 2226 a due colonne in mezza pergamena e tela . . . . 1 —

— legato in un solo volume in mezza pelle e tela . 18 —

Vocabolario russo-italiano e italiano-russo, di V. FOMIN, con la pronunzia figurata seguita da un dizionaretto pografico dei nomi proprii, da un frasario e da due piccole grammatiche russa e italiana, di pag x-812 . . . . 11 50

Vocabolario numismatico, in 7 lingue, di S. AMBROSOLI. di p. VIII-134 . . 1 50

Vocabolario tecnico illustrato nelle sei lingue: Italiana, Francese, Tedesca, Inglese, Spagnuola, Russa, sistema Deinardt-Schloman, diviso in volumi per ogni singolo ramo della tecnica industriale.

Vol. I. — Elementi di macchine e gli utensili più usuali per la lavorazione del legno e del metallo,

L. C.

in-16, p. VIII-403, con 823 inc. e prefazione dell'Ing. Prof. G. COLOMBO (esaurito).

Vol. II. — **Elettrotecnica**, con circa 1000 inc e numerose formule di p. XII-2100, a 2 e a 4 colonne 36 —

Vol. III. — **Caldaie a vapore, Macchine a vapore, Turbine a vapore**, p. XI-1322, con 3500 incis . . 22 50

Vol. IV. — **Motori a combustione**, di p. X-618 con 1000 inc. e numerose formule . . . . 12 —

Vol. V. — **Ferrovie: Costruzione ed esercizio**, di p. XIII-870, con oltre 1900 inc. e numerose formule . 16 —

Vol. VI. — **Ferrovie: Materiale mobile**, con oltre 1500 illustr. . . . . 14 —

Vol. VII. — **Apparecchi di sollevamento e mezzi di trasporto**, di p. 650, con oltre 1500 inc. . . . 15 —

Vol. VIII. — **Il calcestruzzo armato nelle costruzioni**, di circa 600 pagine, con oltre 1200 inc. . . 8 50

Vol. IX. — **Macchine utensili**, di pagine X-706 con 2400 incisioni . . . . 15 —

Vol. X. — **Veicoli a motore (automobili, motoscafi, aeronautica ed aviazione)**, con 1773 inc. . . . 18 —

Vol. XI. — **Siderurgia**, di pag. XII-785 con 1600 inc. 15 —

Volapuk (Dizion. Italiano-volapük), nozioni di gram., di C. MATTEI, secondo i principi dell'inventore M Schleyer, di p. XXX-198 . . . . 2 50

Volapuk (Dizion. volapük-ital.), di C. MATTEI, p. XX- 2 50

Volapuk (Manuale di conversazione, di M. ROSA TOMMASI e A. ZAMBELLI, di p. 152 . . . . . . 2 50

Vulcanismo, di L. GATTA, di p. VIII-268 e 28 inc. . 1 50

Zebre (Le) di A. GRIFFINI. Studio zoologico popolare illustrato. di pag. XXVIII-298, con 41 tavole . . . 4 —

Zinco. Caratteri e proprietà, di R. MUSU-BOY, di pagine XVI-219, 10 inc. e 4 tav. 3 50

Zolfo (Miniere di), di G. CAGNI, di p. XII-275 e 34 inc. . 3 —

Zoologia, di E. H. GIGLIOLI e CAVANNA G.

I. Invertebrati, di p. 200, con 45 figure (esaurito).

II. Vertebrati, Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci e Anfibi), di pag. XVI-153, con 33 inc. 1 50

III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi, di p. XVI-200, con 22 inc. . 1 50

Zoonosi, di G. GALLI VALERIO, di p. XV-227 . . . 1 50

Zootecnia, di G. TAMPELLINI, 2ª ediz., di p. XV-444, 179 inc. e 12 tav. 5 50

Zootecnia — vedi: Abitazioni animali - Animali da cortile - Alimentazione del bestiame - Araldica zootecnica - Bestiame - Cane - Cani e gatti - Cavallo - Maiale - Ornitologia - Porco - Razze bovine - Veterinario - Maniscalco.

Zucchero (Industria dello):

I. **Coltivazione della barbabietola da zucchero**, di B. R. DEBARBIERI, di p. XVI-220 con 12 inc. . . . 2 50

II. **Commercio importanza economica e legislazione doganale**, di L. FONTANA-RUSSO, di p. XII-244 2 50

III. **Fabbricazione dello Zucchero di barbabietola**, di A. TACCANI, di p. XII-228 con 71 inc. 3 50

Zucchero e alcool nei loro rapporti agricoli, fisiol. e soc., di S. LAURETI, di p. XVI-426 . 4 50

INDICE ALFABETICO PER AUTORI (I numeri indicano le pagine)